正規 k 標本問題におけるベイズ的縮小推定

東京大・経済 今井 凌
東京大・経済 久保川 達也

同じ測定機器を使う k 個の実験施設における各標本平均や, 隣接する k 地域での固定計画線形回帰における回帰係数の OLS 推定量などは, k 個のサイズ 1 の標本がそれぞれ p 次元正規分布に従う k 標本問題の設定における各標本の母平均ベクトルの推定量と捉えることができる. この際母平均間に同質性が推察される場合, 推察される共通平均の存在を, 事前分布の設定を通じてモデルに組み込むベイズ推定が考えられるが, 決定理論的な考察は [3] の 2 標本問題までに留まっている. そこで本研究では以下のモデルを考察する. $i = 1, \ldots, k$ で

$$x_i | \mu_i \overset{\text{i.ni.d.}}{\sim} \mathcal{N}_p(\mu_i, \sigma^2 V_i),$$
$$\mu_i | \nu, \tau^2 \overset{\text{i.ni.d.}}{\sim} \mathcal{N}_p(\nu, \tau^2 V_i),$$

V_i は既知の $p \times p$ 正定値行列, σ^2 は未知とする. さらに, σ^2 の推定量として $\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots x_k)$ と独立に分布する $S \sim \sigma^2 \chi_n^2$ が得られているとする. 標本平均の例では各標本分散をプールしたもの, 線形回帰の例では残差二乗和 $S_i = \|\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{X}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}_i\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{N_i - p}$ が挙げられる. この設定の下で $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \cdots \mu_k)$ の推定を考える.

まず損失として $L(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^k \|\hat{\mu}_i - \mu_i\|^2_{V_i^{-1}} / \sigma^2$ を用いた同時推定を考える. $A = \left(\sum_{i=1}^k V_i^{-1} \right)^{-1}$, $\hat{\nu} = A \sum_{i=1}^k V_i^{-1} x_i$, $F = \sum_{i=1}^k \|x_i - \hat{\nu}\|^2_{V_i^{-1}} / S$, $G = \|\hat{\nu}\|^2_{A^{-1}} / S$ とおいたとき, $\nu | \gamma^2 \sim \mathcal{N}_p\left(0, \gamma^2 A\right)$ という事前分布より得られる経験ベイズ推定量から縮小推定量のクラス

$$\hat{\mu}_i(\phi, \psi) = x_i - \frac{\phi(F)}{F}(x_i - \hat{\nu}) - \frac{\psi(G)}{G}\hat{\nu} \tag{1}$$

が導かれることを説明し, このクラスが各標本の観測 $\boldsymbol{x}$ や 2 標本問題において [3] で考察されたクラスを優越しミニマックスとなる十分条件を導出する. リスクの評価には [1] の多変量正規分布に対する Stein の等式と, カイ 2 乗等式を用いる. σ^2 が既知の場合に, 得られた条件と [2] の結果から, $\pi(\tau^2, \gamma^2) \propto \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right)^\alpha \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2 + \gamma^2}\right)^\beta$ という事前分布を考えたときに得られる一般化ベイズ推定量がミニマックスかつ許容的な推定量となる α, β の条件を与える. σ^2 が未知の場合には, [4] に倣い (1) を $\phi(F, S), \psi(G, S)$ を用いたクラスへ拡張し, proper な事前分布によるミニマックスなベイズ推定量の導出を考察する.

次に, 損失として $L(\hat{\mu}_1, \mu_1) = \|\hat{\mu}_1 - \mu_1\|^2_Q / \sigma^2$ (Q は既知の正定値行列) を用いた μ_1 の推定問題においても, ある条件の下で (1) の縮小推定量 $\hat{\mu}_1(\phi, \psi) = x_1 - \frac{\phi(F)}{F}(x_1 - \hat{\nu}) - \frac{\psi(G)}{G}\hat{\nu}$ が x_1 を優越することを示す. 最後に数値実験の結果と実データへの応用を紹介する.

参考文献

[1] Bilodeau, M., Kariya, T. (1989). Minimax Estimators in the Normal MANOVA Model. *J. Multivariate Anal.*, **28**: 260-270.

[2] Brown, L. D. (1971). Admissible estimators, recurrent diffusions, and insolvable boundary value problems. *Ann. Math. Statist.*, **42**: 855-903.

[3] Ghosh, M., Sinha, B. K. (1988). Empirical and Hierarchical Bayes Competitors of Preliminary Test Estimators in Two Sample Problems. *J. Multivariate Anal.*, **27**: 206-227.

[4] Strawderman, W. E. (1973). Proper Bayes minimax estimators of the multivariate mormal mean vector for the case of common unknown variances. *Ann. Statist.*, **1**(6): 1189-1194.