対応のある3×3分割表の検定方法に対する ベイズ法を用いた改善

三重大学　　小椋 透
統計数理研究所　柳本 武美

1. はじめに

対応のある 2×2 分割表ではマクネマー検定がよく用いられているが, 有意水準を保てないことは知られている. マクネマー検定はベイズ型検定として表せることを用いると, 有意水準が遵守された上で実質水準の高い検定に改善できる.

本研究では, データに欠測値が含まれている場合に対して, ベイズ法を用いて有意水準を遵守した上で実質水準の高い検定法に改善する.

2. ベイズ法

n 人の被験者からの欠測値が含まれるサンプルと母集団の確率を次のように表す.

		対照薬			
		有効	無効	欠測	計
試	有効	x_{11}	x_{10}	v_{1+}	$x_{1+} + v_{1+}$
験	無効	x_{01}	x_{00}	v_{0+}	$x_{0+} + v_{0+}$
薬	欠測	u_{+1}	u_{+0}	0	u_{++}
	計	$x_{+1} + u_{+1}$	$x_{+0} + u_{+0}$	v_{++}	n

	対照薬		
	有効	無効	計
有効	p_{11}	p_{10}	p_{1+}
無効	p_{01}	p_{00}	p_{0+}
計	p_{+1}	p_{+0}	1

帰無仮説 H_0: $p_{10} = p_{01}$, 対立仮説 H_1: $p_{10} > p_{01}$ とする. 欠測値が含まれるデータセット D が与えられたとき, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ の尤度関数, 事前密度, 事後分布は次のように表せる.

尤度関数　$L(\boldsymbol{p}|D) \propto p_{11}^{x_{11}} p_{10}^{x_{10}} p_{01}^{x_{01}} p_{00}^{x_{00}} p_{1+}^{v_{1+}} p_{0+}^{v_{0+}} p_{+1}^{u_{+1}} p_{+0}^{u_{+0}}$

事前密度　$\pi(\boldsymbol{p}) \propto p_{11}^{\alpha_{11}-1} p_{10}^{\alpha_{10}-1} p_{01}^{\alpha_{01}-1} p_{00}^{\alpha_{00}-1}$ $(\alpha_{11}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{11} > 0)$

事後分布　$\pi(\boldsymbol{p}|D) \propto p_{11}^{x_{11}+\alpha_{11}-1} p_{10}^{x_{10}+\alpha_{10}-1} p_{01}^{x_{01}+\alpha_{01}-1} p_{00}^{x_{00}+\alpha_{00}-1} p_{1+}^{v_{1+}} p_{0+}^{v_{0+}} p_{+1}^{u_{+1}} p_{+0}^{u_{+0}}$

このとき, 事後確率 $pp(D)$ は次のように表せる. また, 検定統計量 $T = pp(D)$ とする.

$$pp(D) = \Pr(p_{1+} > p_{+1} | \pi(\boldsymbol{p}|D)) = \Pr\left(\frac{p_{10}}{p_{10} + p_{01}} > \frac{1}{2} \middle| \pi(\boldsymbol{p}|D)\right)$$

通常の検定では, 有意水準 α のとき, 棄却域は $T \geq 1 - \alpha$ と定めるが, 本研究では α の代わりに α' を用いることで検定の改善を行う. 数値例を用いて有効性を検証する.

参考文献

[1] Altham, P. M. E. and Hankin, R. K. S. (2010). Using recently developed software on a 2×2 table of matched pairs with incompletely classified data. *J. R. Stat. Soc. Ser. C*, **59**(2), 377-379.

[2] Lin, Y., Lipsitz, S., Sinha, D., Gawande, A. A., Regenbogen, S. E. and Greenberg, C. C. (2009). Using Bayesian p-values in a 2×2 table of matched pairs with incompletely classified data. *J. R. Stat. Soc. Ser. C*, **58**(2), 237-246.

[3] Ogura, T. and Yanagimoto, T. (2016). Improving and extending the McNemar test using the Bayesian method. *Stat. Med.*, **35**(14), 2455-2466.