指数拡散分布族における母数推定の改良

中央大学理工学部　作村 建紀
中央大学理工学部　鎌倉 稔成
統計数理研究所　柳本 武美

1. はじめに

正規分布，ガンマ分布，逆ガウス分布に代表される指数拡散分布族において，平均母数と拡散母数の推定に焦点を当てる．標準的な推定量として考えられるのは，最尤推定量（MLE）や条件付き最尤推定量（CMLE）である．平均母数の推定量は，MLE においては標本平均になる．一方で，自然母数の事後平均を考えることもできる．この推定量は最適性などの多くの興味深い特徴を持つ (Yanagimoto and Ohnishi 2009)．さらに，事前情報が少ない場合の弱情報事前分布の代替として，無情報事前分布を用いることは，情報を含む事前分布が得られたときにはさらに良い推定量となることが期待できるという観点から，重要であると考える．よって，無情報事前分布として，Jefferys' prior または Reference prior を事前分布としたときの自然母数の事後平均について考える．このとき，いくつかの損失関数に基づくリスク評価によって，MLE との比較を行い，本提案推定量の性能について言及する．

2. 提案推定量

指数拡散分布族の密度関数の形式は，$\exp\{\tau(x\theta - M(\theta) - N(x)\}a(x)$ と表される．拡散母数 τ を既知とすれば，正規分布では $\theta = \mu$，ガンマ分布では $\theta = -1/\mu$，逆ガウス分布では $\theta = -1/(2\mu^2)$ がそれぞれ対応する．$\mathrm{E}\{g(\theta); \pi(\theta)\}$ は確率密度 $\pi(\theta)$ の下での関数 $g(\theta)$ の期待値を表すとすれば，自然母数 $\boldsymbol{\theta}$ の事後平均は，

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{\theta}; \pi_*(\boldsymbol{\theta}|x)\}, \quad \pi_*(\boldsymbol{\theta}|x) = p(x|\boldsymbol{\theta})\pi_*(\boldsymbol{\theta})$$

である．ただし，$* \in \{J, R\}$ であり，$\pi_J(\boldsymbol{\theta})$ は Jeffreys' prior，$\pi_R(\boldsymbol{\theta})$ は Reference prior を表す．また，$p(x|\boldsymbol{\theta})$ は標本密度を表す．

2. リスク比較

損失関数を $L_*(\hat{\theta}; \theta)$ として，リスク評価を次式で定義する．

$$R_*(\hat{\theta}, \theta) = \int L_*(\hat{\theta}; \theta) p(x|\theta) dx$$

損失関数については，二乗誤差 $L_s(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$，Kullback-Leibler divergence（KLD）$L_e(\hat{\theta}, \theta) = D(\hat{\theta}, \theta)$，その双対な KLD として $L_m(\hat{\theta}, \theta) = D(\theta, \hat{\theta})$ の 3 つを主に扱い，シミュレーションによりリスクの比較を行った．その結果，逆ガウス分布における提案推定量は，拡散母数 τ が既知のときは μ が小さい条件で MLE よりも優れた結果となった．逆ガウス分布では μ が小さいところで良いことが望ましいため，この結果は提案推定量の性能の良さを示す結果と言える．τ が未知のときは，MLE よりも良い条件では大きく優れ，悪いところでは小さく劣るという結果を示した．よって，無情報事前分布を仮定していても，提案推定量は有効に働くことが分かった．情報を含む事前密度が仮定できれば，なお良い推定量が得られると期待できる．

References

[1] Bernardo, J. and Smith, A. (2000). Wiley, Chichester.
[2] Diaconis, P. and Ylvisaker, D. (1979). The Annals of Statistics, 7:269–281.
[3] Garvan, C. W. and Ghosh, M. (1997). Biometrika, 84:976–982.
[4] Johnson, N., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). Wiley, New York.
[5] Jorgensen, B. (1997). Chapman & Hall, London.
[6] Robert, C. (2007). Springer Science & Business Media.
[7] Yanagimoto, T. and Ohnishi, T. (2009). Journal of Statistical Planning and Inference, 39:3064–3075.