

Directional measure for marginal homogeneity in square contingency tables

中野 弘 (東京理大理工学研究科)
 生亀 清貴 (東京理大理工)
 富澤 貞男 (東京理大理工)

行と列が順序のある同じ分類からなる $r \times r$ 正方分割表において, (i, j) セル確率を p_{ij} ($i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, r$) とする. 周辺同等 (MH) モデル (Stuart, 1955) は次のように定義される:

$$p_{i\cdot} = p_{\cdot i} \quad (i = 1, \dots, r),$$

ただし, $p_{i\cdot} = \sum_{t=1}^r p_{it}$, $p_{\cdot i} = \sum_{s=1}^r p_{si}$. MH モデルは次のようにも表される:

$$H_{1(i)} = H_{2(i)} \quad (i = 1, \dots, r-1),$$

ただし, $H_{1(i)} = \sum_{s=1}^i \sum_{t=i+1}^r p_s \cdot p_{\cdot t}$, $H_{2(i)} = \sum_{s=i+1}^r \sum_{t=1}^i p_s \cdot p_{\cdot t}$ である. MH モデルが成り立たないとき, その隔たりがどの程度かを測ることに関心がある. 本講演では, 周辺確率に関して2種類の完全非同等性を最小値と最大値に持つような, MH モデルからの隔たりを測る尺度を提案する. $\{H_{1(i)} + H_{2(i)} \neq 0\}$ を仮定して,

$$\Gamma = \sum_{m=1}^{r-1} (H_{1(m)} + H_{2(m)}), \quad H_{1(i)}^* = \frac{H_{1(i)}}{\Gamma}, \quad H_{2(i)}^* = \frac{H_{2(i)}}{\Gamma} \quad (i = 1, \dots, r-1),$$

とする. このとき, MH モデルからの隔たりを測る尺度を次のように提案する:

$$\Phi = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{r-1} (H_{1(i)}^* + H_{2(i)}^*) \left(\theta_i - \frac{\pi}{4} \right),$$

ただし,

$$\theta_i = \cos^{-1} \left(\frac{H_{1(i)}}{\sqrt{H_{1(i)}^2 + H_{2(i)}^2}} \right).$$

この尺度は次の性質をもつ: (i) $-1 \leq \Phi \leq 1$ の値をとり, (ii) 周辺ロジスティックモデル (McCullagh, 1977) の下で $\Phi = 0$ ならば, MH モデルが成り立つ. また, (iii) $\Phi = -1$ となるための必要十分条件は任意の i に対して $H_{2(i)} = 0$ ($H_{1(i)} > 0$) となること, (iv) $\Phi = 1$ となるための必要十分条件は任意の i に対して $H_{1(i)} = 0$ ($H_{2(i)} > 0$) となることである.

ここで, (i, j) セル観測度数を n_{ij} とし, $n = \sum \sum n_{ij}$ とする. また, $\{n_{ij}\}$ は多項分布に従うと仮定する. さらに, $\{\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n\}$ とし, $\hat{\Phi}$ を Φ の $\{p_{ij}\}$ を $\{\hat{p}_{ij}\}$ で置き換えた推定尺度とする. このとき, デルタ法により, $\sqrt{n}(\hat{\Phi} - \Phi)$ は漸近的に平均0, 分散 $\sigma^2[\Phi]$ の正規分布に従う. 実際のデータ解析の際には, $\sigma^2[\Phi]$ の $\{p_{ij}\}$ を $\{\hat{p}_{ij}\}$ に置き換えた推定分散を用いて Φ の近似信頼区間を構成する.

参考文献

- [1] McCullagh, P. (1977). A logistic model for paired comparisons with ordered categorical data. *Biometrika*, **64**, 449-453.
- [2] Stuart, A. (1955). A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika*, **42**, 412-416.