

# 粒子フィルタリングによるデフォルト率分布の推定

東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻 稗田尚弥  
東京理科大学工学部情報工学科 塩濱敬之

## 1 はじめに

銀行の業務における適切なリスク管理手法は、経済環境の安定において必要不可欠である。融資によって構成される与信ポートフォリオのリスクとリターンを評価し、その健全性や収益性を高めていく与信ポートフォリオの管理は、銀行業務において非常に重要である。与信ポートフォリオは、融資を行った相手が債務不履行（デフォルト）するリスクを抱えている。デフォルトをモデル化するために、企業  $i$  の資産価値を  $U_i = aF + \sqrt{1-a^2}Z_i$  で定義し、閾値  $U$  以下の値をとったときにその企業はデフォルトすると考える 1-ファクター Merton モデルが提唱されている。ここで、 $F$  は全ての企業の共通ファクター、 $Z_i$  は各企業が個別にもつファクター、 $a$  は企業  $i$  の共通ファクターへの感応度である。本研究では連邦準備制度理事会で発表されている、米国のデフォルト率を観測変数とし、1-ファクター Marton モデルから Hull (2012) と Lamb and Perraudin (2008) が求めたデフォルト率の従う分布を状態空間モデルに適用する。状態変数は、各デフォルト率分布が持つパラメータのうち、時変であると考えべきものを状態変数とする。

状態空間モデルによる推定を行う際に、非線形非ガウスな一般の状態空間モデルでは、状態の事後分布を解析的に求める事が困難である。この対応策として、多くのモデルで提案されているのが粒子フィルタリングである。本研究でも粒子フィルタリングによってパラメータ推定を行った。また、時変でないと考えたパラメータの推定は、Douc, Moulines, and Stoffer (2014) を参考に Particle MCEM アルゴリズムなど、いくつかの EM アルゴリズムを適用した。

## 2 デフォルト率の状態空間モデル

本研究では、二つの論文から二種類の状態空間モデルを考案した。下記にモデルをまとめる。

1. 時変パラメータを持つ Vasicek 1-ファクターモデル:

$$\begin{aligned} DR_t &\sim g(DR_t | PD_t, \rho_t), \\ g(DR_t | PD_t, \rho_t) &= \sqrt{\frac{1-\rho_t}{\rho_t}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ (N^{-1}(DR_t))^2 - \left( \frac{\sqrt{1-\rho_t} N^{-1}(DR_t) - N^{-1}(PD_t)}{\sqrt{\rho_t}} \right)^2 \right] \right\}, \\ PD_t &\sim N(\phi_{PD}(PD_{t-1} - \mu_{PD}) + \mu_{PD}, \sigma_{PD}^2), \\ \rho_t &\sim N(\phi_\rho(\rho_{t-1} - \mu_\rho) + \mu_\rho, \sigma_\rho^2). \end{aligned}$$

2. Lamb and Perraudin モデル:

$$\begin{aligned} DR_t &\sim N \left( \frac{\Phi^{-1}(q) - \sqrt{\rho} \sqrt{\beta} X_{t-1}}{\sqrt{1-\rho}}, \frac{\rho(1-\beta)}{1-\rho} \right), \\ X_t &\sim N(\sqrt{\beta} X_{t-1}, 1-\beta). \end{aligned}$$

ここで  $DR_t$  は時点  $t$  でのデフォルト率、モデル 1 の  $PD_t$  は各企業の潜在的デフォルト率、 $\rho_t$  は時刻  $t$  における共通ファクターへの感応度、モデル 2 の  $X_t$  は各企業の共通要因を表している。また、モデル 1 の  $\{\phi_{PD}, \phi_{rho}, \mu_{PD}, \mu_\rho, \sigma_{PD}, \sigma_\rho\}$ 、モデル 2 の  $\{q, \rho, \beta\}$  が、時変でないと考えたパラメータである。

## 参考文献

- J. C. Hull, Risk Management and Financial Institution, 2012, New York: Wiley.  
R. Lamb and W. Perraudin, Dynamic Default Rates, 2008, Working Paper.  
R. Douc and E. Moulines and D.S Stoffer, Nonlinear time series. Theory, methods and applications with R examples, 2014, CRC Press.