Nonparametric multiple comparison procedure in the one-way layout

専修大・経営　　西山　貴弘
東京理科大・理　村上　秀俊

本報告では, 複数個の母集団において分散が異なる場合の平均間の多重比較法について議論し, 特に, 全ての対比較に対する順位に基づいたノンパラメトリック多重比較法を提案する.

いま, $i = 1, \ldots, k$ に対して, 第 i 母集団が連続分布 $F_i(x)$ に従うような k 個の互いに独立な母集団を考える. さらに, X_{ij} $(j = 1, \ldots, n_i)$ を第 i 母集団からの無作為標本, R_{ij} を $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ 個の標本における X_{ij} の順位とし, $\mu_i = \mathrm{E}[F_i(X_{ij})]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}[F_i(X_{ij})]$ とする. 平均の同等性検定問題に対する多くの研究は, 母集団間の等分散性を仮定した下で行われているが, Behrens-Fisher 問題と呼ばれる母集団間の等分散性を仮定しない場合において, $k = 2$ のときの代表的なノンパラメトリック法として, Brunner-Munzel 検定（Brunner and Munzel (2000)）が知られている. ここでは, Brunner-Munzel 検定で用いられる検定統計量を利用することにより, k 個の母集団の平均間の全ての対比較に対して, 次の検定統計量を提案する.

$$\mathrm{BM}_{\max} = \max_{1 \le s < t \le k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N_{st}}} \cdot \frac{\bar{R}_{t\cdot} - \bar{R}_{s\cdot}}{\hat{\sigma}_{st}} \right\}.$$

ここで, $N_{st} = n_s + n_t$ であり, $R_{ij}^{(i)}$ を $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ における X_{ij} の順位とするとき,

$$\bar{R}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij},\ \hat{\sigma}_{st}^2 = N_{st} \left(\frac{\hat{\sigma}_s^2}{n_s} + \frac{\hat{\sigma}_t^2}{n_t} \right),\ \hat{\sigma}_i^2 = \frac{S_i^2}{(N_{st} - n_i)^2},$$
$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(R_{ij} - R_{ij}^{(i)} - \bar{R}_{i\cdot} + \frac{n_i + 1}{2} \right)^2.$$

さらに, w を $\Pr\{|\mathrm{BM}_{\max} > w|\} = \alpha$ を満たす値とするとき, $\mathrm{BM}_{\max}$ 統計量に基づく平均間の全ての対比較に対する同時信頼区間の構成を考え, 以下の定理を与える.

Theorem 1. 平均間の全ての対比較に対する信頼係数 $1 - \alpha$ の同時信頼区間は,

$$D_{(-\lfloor -w_{st} \rfloor)}^{(s,t)} \le \mu_s - \mu_t \le D_{(\lfloor n_s n_t - w_{st} \rfloor + 1)}^{(s,t)}, \quad \text{for all } 1 \le s < t \le k.$$

ただし, $w_{st} = -n_s n_t \sigma_{st} w / \sqrt{N_{st}} + n_s n_t / 2$ であり, $D_{(1)}^{(s,t)} \le D_{(2)}^{(s,t)} \le \cdots \le D_{(n_s n_t)}^{(s,t)}$ は $\{X_{s\ell} - X_{t\ell'} | \ell = 1, \ldots, n_s, \ell' = 1, \ldots, n_t\}$ に対する順序統計量である.

実際にこの同時信頼区間の値を求める為には w の値が必要となるが, 正確な値を求めることは困難である. そこで本報告では, $\mathrm{BM}_{\max}$ 統計量の極限分布の導出，およびその近似分布の提案を行い，近似同時信頼区間を構成する. また, その近似精度をモンテカルロ・シミュレーションによって数値的に評価する. 詳細は当日報告する.

参考文献

[1] Brunner, E. and Munzel, U. (2000). “The nonparametric Behrens-Fisher Problem: asymptotic theory and a small-sample approximation”, *Biomerical Journal*, **42,** 17–25.