Analysis of Variance for Multivariate Time Series

長幡　英明　(早稲田大学　基幹理工学研究科)
谷口　正信　(早稲田大学　理工学研究所)

1. Introduction

分散分析は統計学においてもっとも基本的なものであり,歴史をもつ．本研究では次のような一元配置の多変量分散分析（MANOVA）モデル:

$$\boldsymbol{X}_{it} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\epsilon}_{it},\ t = 1, \ldots, n_i,\ i = 1, \ldots, q \tag{1}$$

を扱い, 従来とは異なり撹乱項 $\{\boldsymbol{\epsilon}_{it}\}$ は従属過程と想定して検定統計量の漸近分布を Hannan(1970) などに基づいて導出する．Fujikoshi(2002) は非正規独立標本に対する共分散行列の等質性を仮定した一元配置の MANOVA について最尤検定, Lawley-Hotelling 検定, Bartlett-Nanda-Pillai 検定における検定統計量の漸近分布を仮説下,対立仮説下で導出した．しかしこれらの結果は、相関の除去が難しい繰り返し実験のデータや多変量時系列データに対しては適用できない．本研究では非正規な従属標本の下で共分散行列の等質性を仮定した一元配置の MANOVA について古典的な 3 つの検定統計量の漸近分布が χ^2-分布になるための十分条件を求める．またこの十分条件を満たさない場合は、新しく Whittle 尤度に基づく検定統計量を提案し、漸近 χ^2-分布に従うことを示す.

2. Settings

$\boldsymbol{X}_{i1}, \ldots \boldsymbol{X}_{in_i}$ を (1) からの p 次元の観測系列とし, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i, \ldots, \mu_p)'$, $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ip})'$ とする．また $\boldsymbol{\epsilon}_i \equiv \{\boldsymbol{\epsilon}_{it};\ t = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, q\}$ は互いに独立な p 次元定常過程で $E\boldsymbol{\epsilon}_i = \boldsymbol{0}$, 自己共分散行列 $\Gamma(\cdot) = \{\Gamma_{j,k}(t)\,;\, j, k = 1, \ldots, p\}$, スペクトル密度行列 $\boldsymbol{f}(\lambda)$ をもつとする．検定する仮説は

$$H : \boldsymbol{\alpha}_1 = \cdots = \boldsymbol{\alpha}_q$$

とする．基本統計量として $\hat{\boldsymbol{X}}_{i\cdot}$, $\hat{\boldsymbol{X}}_{\cdot\cdot}$, $\hat{\mathcal{S}}_H$, $\hat{\mathcal{S}}_E$ をそれぞれ群内平均, 全平均, 群間平方和, 群内平方和とする．ここで $n = n_1 + \cdots + n_q$ とする．独立性をもつ正規モデルに対しては従来から次のような検定統計量が提案されている.

$$LR \equiv -n \log\{|\hat{\mathcal{S}}_E|/|\hat{\mathcal{S}}_E + \hat{\mathcal{S}}_H|\} \text{ (likelihood ratio test)},$$
$$LH \equiv n\mathrm{tr}\{\hat{\mathcal{S}}_H \hat{\mathcal{S}}_E^{-1}\} \text{ (Lawley-Hotelling test)},$$
$$BNP \equiv n\mathrm{tr}\hat{\mathcal{S}}_H(\hat{\mathcal{S}}_E + \hat{\mathcal{S}}_H)^{-1} \text{ (Bartlett-Nanda-Pillai test)}.$$

本報告では $\{\boldsymbol{\epsilon}_{it}\}$ は一般化線形過程から生成されているとする．ここに $\{\boldsymbol{\epsilon}_{it}\}$ の p 次元革新過程 $\{\eta_i(t)\}$ は互いに独立で各々平均 $\boldsymbol{0}$ 分散 $\boldsymbol{G}$ をもつ分布で, 係数行列に $A(j)$ の $p \times p$ 定数行列をもつとする.本研究では従属撹乱項を仮定し, また正規性も仮定しないので Hannan(1970) の正則条件を仮定し, 次の結果を得る.

Theorem 1. 正則条件下で

$$\Gamma(j) = \boldsymbol{0}\ \mathit{for\ all}\ j \neq 0. \tag{2}$$

が成り立つとすると, 帰無仮説 H の下で検定統計量 LR, LH, BNP は漸近分布 $\chi^2_{p(q-1)}$ に従う.

次に十分条件 (2) が満たされない場合を考える．正規尤度関数への Whittle 近似として

$$l(\boldsymbol{\mu}, \alpha) \equiv -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{s=0}^{n_i-1} \mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{I}_i(\lambda_s)\boldsymbol{f}(\lambda_s)^{-1}\right\}, \quad \lambda_s = 2\pi s/n_i$$

が知られている．ここでは $\boldsymbol{I}_i(\lambda)$ は $\{\boldsymbol{\epsilon}_{it}\}$ のピリオドグラムである．これを用いて帰無仮説 H の下で、次の Whittle 尤度型の検定統計量を提案する.

$$WLR \equiv 2\left\{l(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\cdot\cdot}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) - l(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\cdot\cdot}, \boldsymbol{0})\right\},$$

$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\cdot\cdot}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ はそれぞれ母平均と処理効果の Whittle 推定値である．この検定統計量も上記と同様の正則条件下を考え、(2) なしに次の結果を得る.

Theorem 2. 正則条件を満たすとき、帰無仮説 H の下で検定統計量 WLR は漸近的に $\chi^2_{p(q-1)}$ へ分布収束する.

さらに当日は上記定理を裏付ける多変量時系列データでの数値実験結果と、金融データへの適用例も合わせて報告する.

参考文献

[1] Fujikoshi, Y., Asymptotic expansions for the distributions of multivariate basic statistics and one-way MANOVA tests under nonnormality. *JSPI*, 108(1): 263-282, 2002.

[2] Hannan, E. J., Multiple Time Series, volume 38. John Wiley & Sons, 1970.