長期記憶性を持ったポートフォリオの分散に対する収束レートの比較

慶應義塾大学理工学研究科　阿部　文貴
慶應義塾大学理工学部　白石　博

1　はじめに

ポートフォリオ理論とは分散投資を行う際にリスクを回避し, 収益率を高めるには, どう最適化すればよいかを決定する理論であり, 平均-分散基準では, 個々の投資資産の期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 Σ の関数で, 最適分配比率が決定する. 実際には $\boldsymbol{\mu}$ と Σ の代わりに過去の収益率の標本平均ベクトル $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ と標本分散共分散行列 $\widehat{\Sigma}_{sam}$ を用いるが, 近年の市場規模の拡大により投資する資産の数（次元数）が増加し, $\widehat{\Sigma}_{sam}$ が良い推定量ではなくなっている. そこで [1] は収益率にファクター構造を考え, 最小二乗法による Σ の推定量 $\widehat{\Sigma}_{LS}$ の方がより収束レートが良い事を示した. しかし, [1] では誤差項が i.i.d. と仮定していたが, その仮定は現実的ではないと思われる. 本報告では, 誤差項が長期記憶過程に従うと仮定し, その下でのポートフォリオの収束性について議論する.

2　モデル設定

p を資産の数, K をファクターの数とし, リスク資産のファクター構造として次のようなモデルを考える.

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{B}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t$$

ここで, $\boldsymbol{y}_t = (Y_{1t}, \cdots, Y_{pt})^\top$ とし, Y_{it} は資産 i の時刻 t における超過収益率；$\boldsymbol{B} = (b_{ik})_{i=1,\cdots,p\,,\,k=1,\cdots,K}$ とし, b_{ik} は資産 i の第 k ファクターに対するファクターローディング；$\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \cdots, f_{Kt})^\top$ とし, f_{kt} は時刻 t における第 k ファクター；$\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1t}, \cdots, \epsilon_{pt})^\top$ は誤差項とし, $\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \mathbf{0}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \Sigma_0$(対角行列) とする.
今, 標本 $(\boldsymbol{y}_1, \mathbf{f}_1), \cdots, (\boldsymbol{y}_n, \mathbf{f}_n)$ が観測されているとし, 次を仮定する.

仮定 1 : p, K は $p >> K$ を保ちながら標本サイズ n と共に増加する.　仮定 2 : $\{\mathbf{f}_t\}$ と $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ は無相関.

上記の設定の下で [1] は, 最小分散ポートフォリオ (GMV) の分散 $\boldsymbol{\xi}_g^\top \Sigma \boldsymbol{\xi}_g$($\boldsymbol{\xi}_g$: 各資産への分配比率となる p 次元のベクトル) に対する 2 つの推定量の収束レートが

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}_g^\top \widehat{\Sigma} \widehat{\boldsymbol{\xi}}_g - \boldsymbol{\xi}_g^\top \Sigma \boldsymbol{\xi}_g = o_p\{(p^4 K^4 \log n/n)^{1/2}\} \qquad \widehat{\boldsymbol{\xi}}_g^\top \widehat{\Sigma}_{sam} \widehat{\boldsymbol{\xi}}_g - \boldsymbol{\xi}_g^\top \Sigma \boldsymbol{\xi}_g = o_p\{(p^6 K^2 \log n/n)^{1/2}\}$$

となる事を示した.

本報告では, 誤差項 $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}$ に長期記憶性を仮定し, [2] が提案した推定量も含めて収束レートの比較を行う.

参考文献

[1] Fan, J., Fan, Y., and Lv, J. (2008). High dimensional covariance matrix estimation using a factor model. Journal of Econometrics, 147(1), 186-197.
[2] Ing, C. K., Chiou, H. T., and Guo, M. (2016). Estimation of inverse autocovariance matrices for long memory processes. Bernoulli, 22(3), 1301-1330.