分散未知の多変量正規分布の平均ベクトル推定における許容的なベイズ共変推定量

東京大・空間情報　丸山　祐造

正規線形回帰モデルの正準形は，$X \sim N_p(\theta, I/\eta)$，$\eta S \sim \chi^2_n$，$X \perp\!\!\!\perp S$ なる統計モデルである．線形回帰モデルの誤差項を球面対称分布に一般化すると，$X \in \mathbb{R}^p$ と $S \in \mathbb{R}_+$ が同時密度関数

$$c_n \eta^{(p+n)/2} s^{n/2-1} f(\eta\{\|x-\theta\|^2 + s\}), \quad c_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \tag{1}$$

に従うモデルとなる．パラメータ θ と η が未知であり，損失関数が $L(d,\theta,\eta) = \eta\|d-\theta\|^2$ の下で，パラメータ θ の推定問題を考える．特に，「$p \geq 3$ の場合にミニマクス推定量 X が James-Stein 推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{JS}} = \left(1 - \{(p-2)/(n+2)\}/\{\|X\|^2/S\}\right) X$ によって改良される」ことから生じる問題，「ミニマクスで許容的な推定量を提案すること」への貢献が最終的な目標である．

分散 $1/\eta$ が既知の場合の設定（$X \sim N_p(\mu, I)$）では，ミニマクス性，許容性ともに研究の蓄積がある．特に許容性に関して，proper Bayes 推定量だけでなく，Brown (1971, Annals) による generalized Bayes 推定量が許容的であるための十分条件があることから，ミニマクスで許容的な推定量のクラスは非常に大きい．例えば $\|\mu\|^{2-p}$ に関する generalized Bayes 推定量はミニマクスで許容的である．一方，未知の場合には，特に許容性に関して満足できる結果が得られてこなかった．

本発表では，変換群

$$X \to c(\Gamma X + d),\ \theta \to c(\Gamma\theta + d),\ S \to c^2 S,\ \eta \to \eta/c^2, \quad \Gamma \in \mathcal{O}(p),\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}^p$$

の部分群 $X \to c\Gamma X,\ \theta \to \Gamma\theta,\ S \to c^2 S,\ \eta \to \eta/c^2$ に関して共変な推定量

$$\delta_\psi = \left(1 - \psi(\|X\|^2/S)\right) X \tag{2}$$

に注目する．そのリスク $E\left[\eta\|\delta_\psi - \theta\|^2\right]$ は $\lambda = \eta\|\theta\|^2 \in \mathbb{R}_+$ のみの関数である．そこで，λ に事前分布 $\pi_*(\lambda)$ を導入して，共変 Bayes リスク $\int_0^\infty E\left[\eta\|\delta_\psi - \theta\|^2\right] \pi_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ を定義する．まず，共変 Bayes リスクの ψ に関する minimizer を用いた共変推定量 δ_ψ（以下，共変 Bayes 推定量と略記）は，$\pi_*(\lambda)$ が proper であれば共変推定量 (2) のクラスの中で許容的（以下，共変許容的と略記）であることが分かる．さらに，共変 Bayes 推定量が，元の問題において (θ, η) に対する事前分布

$$\eta^{-1} \times \eta^{p/2} \pi(\eta\|\theta\|^2), \quad \pi(t) = c_p^{-1} t^{1-p/2} \pi_*(t),$$

に関する generalized Bayes 推定量になることが示される．さらに，Blyth (1951, Annals) の方法を用いて，$\pi_*(\lambda)$ あるいは $\pi(\|\mu\|^2)$ が improper の場合の共変 generalized Bayes 推定量の共変許容性も考察できる．大雑把に言って，$\pi(\|\mu\|^2)$ が分散既知の問題で許容的な generalized Bayes 推定量を導く prior であれば，共変 generalized Bayes 推定量は共変許容的であることが示される．その中で $\pi_{\mathrm{H}}(\|\mu\|^2) = \|\mu\|^{2-p}$ に対応する共変許容的な共変 generalized Bayes 推定量 δ^{H} は以下の点で興味深い．Maruyama and Strawderman (2005, Annals) によれば，δ^{H} が f の関数形に依存しない，つまり，正規分布のもとでの事前分布 $\eta^{-1} \times \eta^{p/2}\pi_{\mathrm{H}}(\eta\|\theta\|^2)$ に関する generalized Bayes 推定量が，一般の f における $\eta^{-1} \times \eta^{p/2}\pi_{\mathrm{H}}(\eta\|\theta\|^2)$ に対する generalized Bayes 推定量と一致する．さらに Kubokawa (1991, JMVA)，Maruyama (2003, S&D) では，それぞれ正規分布，一般の f に対して，δ^{H} が James-Stein 推定量を改良するミニマクス推定量であることが示された．