正方分割表における非対称モデル

東京理科大学　田畑 耕治

順序カテゴリ $r \times r$ 正方分割表の (i,j) セル確率を p_{ij} $(i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,r)$ とするとき，分割表の主対角線に関して対称的な位置にあるセル確率の同等性を示す対称（S）モデルは $p_{ij}=p_{ji}$（$i \neq j$）と定義される ([1])．S モデルがデータにあてはまらないとき，S モデルの拡張モデルをあてはめることに関心があり種々の対称性や非対称性のモデルが提案されている ([2], [3], [4])．Tahata *et al.* [5] は，次の非対称モデルを提案した：任意に与えられた k（$k=1,\ldots,r-1$）に対して，

$$p_{ij} = \mu \left(\prod_{l=1}^{k} \alpha_l^{i^l} \beta_l^{j^l} \right) \psi_{ij} \quad (i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,r),$$

ただし，$\psi_{ij} = \gamma \psi_{ji}$（$i<j$）である．このモデルを ELS_k モデルと記す．特に，$\gamma=1$ かつ $\{\alpha_l = \beta_l\}$ とした ELS_k モデルは S モデルである．

Caussinus [2] はセル確率の対称構造を示す S モデルを，オッズ比の対称構造と周辺分布の対称構造に分解できることを示した．ここでは，ELS_k モデルを用いた S モデルの分解を考える．

行変数を X，列変数を Y とする．周辺 k 次積率一致（ME_k）モデルを次のように定義する：任意に与えられた k（$k=1,\ldots,r-1$）に対して，

$$E(X^l) = E(Y^l) \quad (l=1,\ldots,k).$$

ただし，$E(X^l)=\sum_i \sum_t i^l p_{it}$，$E(Y^l)=\sum_s \sum_j j^l p_{sj}$ である．さらに，グローバル対称（GS）モデルは次のように定義される：$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r} p_{ij} = \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r} p_{ji}$．このとき，次の定理を得る．

定理 1. 任意に与えられた k（$k=1,\ldots,r-1$）に対して，S モデルが成り立つための必要十分条件は，ELS_k モデル，ME_k モデル，GS モデルのすべてが成り立つことである．

ME_k モデルと GS モデルの両方の構造をもつモデルを GM_k モデルと記す．このとき，定理 1 から次の系を得る．

系 1. 任意に与えられた k（$k=1,\ldots,r-1$）に対して，S モデルが成り立つための必要十分条件は，ELS_k モデルと GM_k モデルの両方が成り立つことである．

定理 2. 任意に与えられた k（$k=1,\ldots,r-1$）に対して，$G^2(\mathrm{S})$ は $G^2(\mathrm{ELS}_k)$ と $G^2(\mathrm{GM}_k)$ の和と漸近的に同等である．

本講演では，Kateri and Agresti [3] との関係などについても報告する．

参考文献

[1] Bowker, A. H. (1948). A test for symmetry in contingency tables. *Journal of the American Statistical Association*, **43**, 572-574.

[2] Caussinus, H. (1965). Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, Série 4, **29**, 77-182.

[3] Kateri, M. and Agresti, A. (2007). A class of ordinal quasi-symmetry models for square contingency tables. *Statistics and Probability Letters*, **77**, 598-603.

[4] McCullagh, P. (1978). A class of parametric models for the analysis of square contingency tables with ordered categories. *Biometrika*, **65**, 413-418.

[5] Tahata, K., Naganawa, M. and Tomizawa, S. (2016). Extended linear asymmetry model and separation of symmetry for square contingency tables. *Journal of the Japan Statistical Society*, **46**, 189-202.