

統計的推測理論の深化と進展のヒストリー

筑波大学 赤平 昌文

統計的推測理論について小標本論と大標本論の観点から考察する。小標本論では、母集団分布の型を仮定してそれに含まれる母数に関する推測を行うが、完備十分統計量が存在する場合にそれに基づく一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量が得られる。一方、小標本論では最尤推定量 (MLE) は必ずしも良い推定量とはならないことが多い。また、位置母数、尺度母数については、最小リスク共変推定量は一般 Bayes 推定量とも見なされることもあり、具体的に求められる場合もある。しかし、一般の分布の場合には、小標本論では限界があり大標本論または漸近理論、すなわち標本の大きさが無限に大きくなるときの近似理論が必要になる。本講演では、漸近理論を中心に推測の深化と進展の過程に焦点を当てる。

Fisher(1922, *Phil.Trans.*,A; 1925, *Proc.Camb.Phil.Soc.*) は、MLE が漸近正規性をもてば、その漸近分散が情報量の逆数に一致するという意味で漸近的に有効であることを示唆した。しかし、その漸近有効性の根拠とした漸近正規推定量の分散の下界が情報量の逆数になるという不等式が成り立たない例が正規分布のときに Hodges によって示され混乱を招いた。LeCam(1953, *Unv.Calif.Publ.in Statist.*,1) はその不等式が成り立たないような集合は Lebesgue 測度 0 であることを証明した。また、Bahadur(1964, *AMS35*) は推定量を漸近中央値不偏になるように補正すればそのような例を回避できることを示した。なお、無限に多くの局外母数が存在するような Neyman and Scott(1948, *Econometrica* 16) の問題について、セミパラメトリックの観点から Amari and Kumon(1988, *AS16*), Pfanzagl(1990, *Springer LNS63*) らが論じている。

Fisher(1925) は、さらに MLE が漸近有効推定量全体のクラスの中では情報損失を最小にすることを予想し、多項分布の場合に最小カイ 2 乗推定量の情報損失を計算したが誤りがあり、それを Rao(1961, *Proc.4th Berkeley Symp.*) は修正するとともに、その場合に推定量のクラスを限定すれば Fisher の予想が成り立つことを示し、MLE は 2 次の有効であると言った。その後、このアプローチは Ghosh and Subramanyam(1974, *Sankhya A36*), Efron(1975, *AS3*) らへと継承された。また、1970 年代になって、情報量そのものの意味が必ずしも明確でないということから、推定量の真の母数の周りでの集中確率を漸近的に高次まで評価する高次漸近理論の研究が精力的に行われ大きく進展した (Akahira and Takeuchi(1981, *Springer LNS7*), Pfanzagl and Wefelmeyer(1985, *Springer LNS31*), Akahira(1986, *Queen's Papers in Pure and Applied Math.*,75), Ghosh(1994, *NSF-CBMS Regional Conf.Ser.Probab.Statist.*,4), 赤平 (2006, *数学* 58)). そこでは、例えば、適当な正則条件の下で、補正 MLE, 補正一般 Bayes 推定量は、漸近有効推定量の或るクラスの中で 3 次の漸近的有効であることが示された。また、Efron(1975, *AS3*), Amari(1985, *Springer LNS28*) らは微分幾何学的観点から曲指数型分布族の場合に、仮説検定の場合も含めて高次漸近有効性について論じた。高次漸近理論の応用として計量経済学における同時方程式モデルにおいて提案された推定量の良さの比較がある (Takeuchi and Morimune(1985, *Econometrica* 53)).

一方、正則条件が必ずしも成り立たないような非正則な場合の推定論の研究は、小標本論の場合も含めて Akahira and Takeuchi(1995, *Springer LNS107*), Akahira(2017, to appear in *Springer JSS Res.Ser.*) 等で行われている。また、時系列解析における高次漸近理論は、細谷・谷口 (1990, *数学* 42), Taniguchi(1991, *Springer LNS48*) らによって詳細に検討され、さらに拡散過程における高次漸近性については Yoshida(1992, *Probab.Theor.Relat.Field.*,92), 吉田 (2003, *数学* 55) らによって研究されている。

最近では、ビッグデータ、AI 等に統計学の役割が求められていますが、これまでの様々な貴重な知識の蓄積に基づいて構造を把握した上で、それらの理論的基礎をいかに構築するかも問われているのではないのでしょうか。