縮約データを用いた微小拡散過程モデルの初期ベイズ型推定量とハイブリッド型推定量およびその数値シミュレーション

大阪大学基礎工学研究科 貝野友祐
大阪大学基礎工学研究科 内田雅之

1 モデルと推定量

次の確率微分方程式で定義される d 次元拡散過程を考える.

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t,\alpha)dt + \epsilon b(X_t,\beta)dw_t, \quad t\in[0,T], \quad \epsilon\in(0,1], \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

ここで, $a:\mathbb{R}^d\times\Theta_\alpha\to\mathbb{R}^d, b:\mathbb{R}^d\times\Theta_\beta\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^r$, w は r 次元標準ウィーナー過程, ϵ と T は既知の定数, x_0 は確定的初期条件, $\theta=(\alpha,\beta)\in\Theta=\Theta_\alpha\times\Theta_\beta$, $\theta^*=(\alpha^*,\beta^*)\in\Theta$ は θ の真値, Θ_α と Θ_β はそれぞれ $\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q$ 上の有界で凸な開部分集合である．データは離散観測され, $\mathbb{X}_n=(X_{t_i})_{0\le i\le n}, t_i=ih_n, h_n=T/n$ であるとする．$\epsilon\to0, n\to\infty, \frac{1}{\epsilon\sqrt{n}}=O(1)$ の場合を考える．また, ある $\gamma\in(0,1]$ が存在して, $\epsilon(\sqrt{n})^\gamma=O(1)$ を満たすとする．縮約データを $\mathbb{Y}_{n_0}=(X_{t_i})_{0\le i\le n_0}$ とする．ここで, $c\ge1$ に対して $n_0=[\frac{n}{c}]$ とする．縮約データ $\mathbb{Y}_{n_0}$ に基づく疑似対数尤度関数 $U^{(1)}_{\epsilon,n_0}(\alpha)$, $U^{(2)}_{\epsilon,n_0}(\alpha,\beta)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} U^{(1)}_{\epsilon,n_0}(\alpha) &= -\frac{1}{2\epsilon^2 h_n}\sum_{i=1}^{n_0}|\Delta X_i - h_n a(X_{t_{i-1}},\alpha)|^2, \\ U^{(2)}_{\epsilon,n_0}(\alpha,\beta) &= -\frac{1}{2\epsilon^4 h_n^2}\sum_{i=1}^{n_0}\|(\Delta X_i - h_n a(X_{t_{i-1}},\alpha))^{\otimes2} - (\epsilon^2 h_n)B(X_{t_{i-1}},\beta)\|^2. \end{aligned}$$

ここで, $\Delta X_i = X_{t_i}-X_{t_{i-1}}, B(x,\beta)=bb^\star(x,\beta)$ とし, $\star$ は転置を表すとする. また, 行列 A に対して $A^{\otimes2}=AA^\star, \|A\|=tr(AA^\star)^{\frac12}$ とし, $|\cdot|$ をユークリッドノルムとする．$U^{(1)}_{\epsilon,n_0}(\alpha), U^{(2)}_{\epsilon,n_0}(\alpha,\beta)$ を用いて初期ベイズ型推定量を求め, その初期ベイズ型推定量とフルデータ $\mathbb{X}_n$ に基づく疑似対数尤度関数を用いて, 適応的最尤型推定量 (以下, ハイブリッド型推定量と呼ぶ) を導出する．そして, 得られたハイブリッド型推定量の正則条件の下での漸近的性質を示す.

2 数値シミュレーション

初期ベイズ型推定量とハイブリッド型推定量の漸近挙動を数値シミュレーションによって検証する．まず, 適応的最尤型推定量を求めるためには適切な初期値が必要である例を説明する．適切な初期値を探す方法として, ベイズ法, 格子点法, 一様乱数 +optim 法を比較し, ベイズ法が最も優れていることを示す. 具体的には, ベイズ法により初期推定量を求めるためにかかる時間を計測し, これより多くの時間をかけて格子点法と一様乱数+optim 法により初期推定量を求める．その上で, 3 つの初期推定量の中でベイズ型推定量に基づくハイブリッド型推定量が最も精度が良いことを示す．また, ベイズ法ではチューニングパラメータを変化させることで, 初期推定量およびハイブリッド型推定量の精度に差が出る例についても言及する.