

空間自己回帰モデルの同定可能性

早稲田大学 力丸佑紀
(株) データサイエンスコンソーシアム 柴田里程

n 次元空間上の弱定常同時空間自己回帰モデル

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) X_v = \varepsilon_v, \quad \varepsilon_v \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

は、同じスペクトル密度関数を持つ伝達関数が複数種類とれることがある、すなわち、モデルが1つに定まらない場合があることがわかった。本報告では、与えられたスペクトル密度に対してモデルが1つに定まらない例を挙げ、モデルの同定可能性が引き起こす、パラメータ推定やフィッシャー情報量の非正則性の問題について議論する。

伝達関数が

$$P(z_1, \dots, z_d) = \prod_{k=1}^p h_k(z_1, \dots, z_d)$$

と素因数分解できるとき、そのスペクトル密度関数は

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{|P(z_1, \dots, z_d)|^2} = \frac{\sigma^2}{\prod_{k=1}^p h_k(z_1, \dots, z_d) \overline{h_k(z_1, \dots, z_d)}} \quad (1)$$

と書ける。 $k = 1, \dots, p$ に対して、 $h_k(z_1, \dots, z_d)$ と $\overline{h_k(z_1, \dots, z_d)}$ のどちらかを素因数として選択するような多項式を考えれば、(1) と同じスペクトル密度を持つ伝達関数は $P(z_1, \dots, z_d)$ を含んで 2^p 種類とれる。

例えば、1次元同時空間自己回帰モデル $X_v + \beta_1 X_{v+1} + \beta_{-1} X_{v-1} = \varepsilon_v$ を考えるとき、スペクトル密度関数を

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z^{-1} - \bar{\alpha}_1)(z^{-1} - \bar{\alpha}_2)}$$

とすると、モデル式を表す伝達関数は次の4種類とれる。

$$P_1(z) = -\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} z^{-1}(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) = 1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} z - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} z^{-1}$$

$$P_2(z) = -\frac{1}{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} z(z^{-1} - \bar{\alpha}_1)(z^{-1} - \bar{\alpha}_2) = 1 - \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} z - \frac{1}{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2} z^{-1}$$

$$P_3(z) = \frac{1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2} (z - \alpha_1)(z^{-1} - \bar{\alpha}_2) = 1 - \frac{\bar{\alpha}_2}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2} z - \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2} z^{-1}$$

$$P_4(z) = \frac{1}{1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2} (z^{-1} - \bar{\alpha}_1)(z - \alpha_2) = 1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2} z - \frac{\alpha_2}{1 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2} z^{-1}$$

上記の4つの伝達関数は同じスペクトル密度関数をもつため、最尤推定によるパラメータ推定を行った場合、最尤解はそれぞれの伝達関数に対応して4種類存在する。さらに、それらが重複度を持つときには、フィッシャー情報量行列が非正則になり、正しいパラメータ推定ができなくなる。これらの結果について詳しく述べると共に、これまでの本学会で報告してきたフィッシャー情報量行列の正則条件を用いて、推定された値が信頼できるかチェックできる方法についても紹介する。

■参考文献 Yuuki Rikimaru and Ritei Shibata, (2017), Non-identifiability of Simultaneous Spatial Autoregressive Model and Singularity of Fisher Information Matrix, *International Journal of Statistics and Probability*, 6(4), 31-38.