

Semiparametric Estimation for Optimal Dividend Barrier with Insurance Portfolio

慶應義塾大学工学部 白石 博
University of Southampton Zudi Lu

保険会社の破産リスクに関する理論の応用として、会社の余剰資本（サープラス）がある境界を上回ったときに、その部分を株主に返還する配当の問題がある。本報告では、伝統的な複合ポアソン過程を想定し、最適な境界の統計的推定問題を考える。時刻 $t(\geq 0)$ におけるサープラス $U(t)$ を

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

と定義する。ここで、 $u(\geq 0)$ を初期サープラス； $c(> 0)$ を単位時間あたりの保険料率； $N(t)$ を時刻 t までのクレーム（保険金請求）頻度； X_i を第 i 回目におけるクレーム金額； $S(t)$ を時刻 t までのクレーム累積額とする。本報告では、伝統的なモデルとして、 $\{N(t)\}$ を強度 λ を持つポアソン過程； X_i を独立同一な確率密度関数 $f(x)$ を持つ正值確率変数に従うと仮定する。このとき、 $\{S(t)\}$ は複合ポアソン過程となる。上記のサープラス過程 $\{U(t)\}$ に対し、 $b(\geq u)$ を配当境界とし、サープラスが b に到達している間の保険料収入を配当として株主に返還すると仮定する。このときのサープラス $U_b(t)$ は

$$U_b(t) = u + c \int_0^t \mathbb{I}_{\{U_b(s) < b\}} ds - S(t)$$

と書くことができる。ここで、最適配当問題として、破産時刻 $T_b = \inf\{t | U_b(t) < 0\}$ までに支払われる配当の現在価値の期待値

$$V(u, b) = E \left[\int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD_b(t) \mid U_b(0) = u \right]$$

が最大となる b (b_0 とする。) を最適な境界と定義する。ここで、 $\delta(> 0)$ は瞬間割引率； $D_b(t)$ は時刻 t までに支払われる累積配当額であり、 $D_b(t) = U(t) - U_b(t)$ と書くことができる。Gerber and Shiu (1997, 1998) は、 b_0 が次の関数 $\Psi(b)$ を最小化することを示した。

$$\Psi(b) = \sum_{r=0}^{\infty} \dot{G}_r(b) \quad \text{ここに } \dot{G}_r(b) = \frac{d}{db} G_r(b) \text{ かつ } G_r(b) = \begin{cases} e^{\rho b} & r = 0 \\ \int_0^b e^{\rho z} g^{*r}(b-z) dz & r \geq 1 \end{cases}$$

ただし、 ρ とは Lundberg Fundamental Equation ($\ell(\xi) = \delta + \lambda - c\xi - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\xi x} f(x) dx$) の正の解とし、 g^{*r} とは、関数 $g(x) = \frac{\lambda}{c} e^{-\rho y} f(x+y) dy$ の r 重たたみ込みとする。

本報告では、サイズ n のクレーム金額およびクレーム発生間隔に関する標本 $\{(X_1, \Delta T_1), \dots, (X_n, \Delta T_n)\}$ が観測されたとして、目的関数 $\Psi(b)$ の推定量 $\hat{\Psi}_{m,s}(b)$ を構成し、 $\hat{\Psi}_{m,s}(b)$ の最小化解として b_0 の推定量 $\hat{b}_{m,s}$ を提議する。推定量 $\hat{b}_{m,s}$ が一致性を持つこと示すとともに、シミュレーション実験および実データ解析から、提案推定量が実用可能であることを報告する。

参考文献

1. Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W.(1997) The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21(2), 129-137.
2. Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W.(1998) On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 48-78.