

ガンマ分布の形状パラメータ及び関連分布の自由度の推定について

東京大学・経済・博士2年 玉江 大将
東京大学・経済・教授 久保川 達也

- はじめに

ガンマ分布の形状パラメータの推定について、最尤推定を行い場合にはスコア関数に digamma 関数が出てくることで解析的に求めることができない。一方で、モーメント方による推定量に関しては解析的に導出されるものの、ML に対してより不安定なものとなる。

Ye, Z.-S. and Chen, N. (2017) では一般化ガンマ分布の3つのパラメータに関するスコア関数を導出し、その解を解く上で事後的に追加的なパラメータである γ をおくことで解析的な解を導出している。本研究においては score-adjusted method により、同様の結果を求め、その解析的に求めることが可能な推定量について漸近的な性質を調べる。特に、ガンマ分布の分散の漸近分散がモーメント方よりも小さく、かつ MLE の漸近分散に近いものであることを示した。推定量の性質について、simulation および実データ解析の側面からも妥当性を鑑みる。

- 発表内容

3つの推定量の漸近分散をそれぞれ MLE については $\hat{\sigma}^{2ML}$ 、モーメント法については $\hat{\sigma}^{2MM}$ 、score-adjusted については $\hat{\sigma}^{2SA}$ とする。

Proposition 0.1 $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^{2ML} - \sigma^2)$, $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^{2SA} - \sigma^2)$ および $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^{2MM} - \sigma^2)$ の漸近分散は

$$\begin{aligned}\text{asym.var}(\hat{\sigma}^{2ML}) &= 4\alpha\beta^4 + \frac{\alpha\beta^4}{\alpha\psi_1(\alpha) - 1}, \\ \text{asym.var}(\hat{\sigma}^{2SA}) &= \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^4\{3 + \alpha^2\psi_1(\alpha)\}, \\ \text{asym.var}(\hat{\sigma}^{2MM}) &= 2\alpha(\alpha + 3)\beta^4.\end{aligned}$$

Proposition 0.2 3つの漸近分散について、以下の不等式が成り立つ。

$$\text{asym.var}(\hat{\sigma}^{2ML}) < \text{asym.var}(\hat{\sigma}^{2SA}) < \text{asym.var}(\hat{\sigma}^{2MM}).$$

また、上記を示す上で必要な trigamma 関数 $\psi_1(\alpha)$ の上限と下限について以下が言える。

Lemma 0.1 任意の $\alpha > 0$ について、

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{(\alpha+n)^2} + \frac{1}{\alpha+k+1} + \frac{1}{2(\alpha+k+1)} \leq \psi_1(\alpha) \leq \sum_{n=0}^k \frac{1}{(\alpha+n)^2} + \frac{1}{\alpha+k}.$$

- **参考文献** Ye, Z.-S. and Chen, N. (2017). Closed-form estimators for the gamma distribution derived from likelihood equations. *Amer. Statistician*, to appear.