多変量確率分布の鞍点について

東京国際大学　竹内 宏行

1. はじめに

鞍点近似は特性関数が最も激しく変化する場所，すなわち鞍点と呼ばれる一点に積分を局在化させる方法である．鞍点は対応する確率分布に関する殆ど全ての情報を持つのみでなく，解析･統計的に興味深い性質を有している (竹内 (2013)(2015))．一変量確率分布 F のキュムラント母関数 K_F に関するルジャンドル変換 $K_F^*(t) = \sup_{\alpha \in \mathrm{dom} K_F}\{t\alpha - K_F(\alpha)\}$ において，鞍点は右辺の上限を達成する t の関数 $\alpha_F(t)$ として定義される．α_F は自然な条件の下，期待値の近傍における振る舞いのみで F と一意に対応し，α_F より F を得るための反転公式が存在する (竹内 (2013)(2014))．統計量 T_n の漸近正規性は $\sup_{|t|\le\delta}|\alpha_{T_n}(t) - t| \to 0$ を十分条件として得られるが，特にこの収束の様子はグラフ上，凸関数列の直線への狭義単調収束として捉えられる (竹内 (2013)(2014))．例えば核型密度推定量の各点における漸近正規性の比較・評価を行う場合，この性質が有効に機能する (竹内 (2017))．

2. 多変量確率分布の鞍点

本報告では多変量確率分布の鞍点が持つ性質を考える．k 次元分布 F の鞍点は

$$\boldsymbol{\alpha}_F(\boldsymbol{t}) = {}^t\Big(\alpha_1(t_1,\cdots,t_k),\cdots,\alpha_k(t_1,\cdots,t_k)\Big)$$

なるベクトル値多変数関数となり，局所座標 $(t_1,\cdots,t_k) \in U \subset \mathbb{R}^k$ を持つ k 次元微分可能多様体 $\mathcal{M}_F$ として捉えられる．従って F に対応する鞍点 $\boldsymbol{\alpha}_F : \mathbb{R}^k \to \mathcal{M}_F$ は多様体間の写像であり，例えば $\mathcal{M}_F$ の領域 Ω におけるエネルギー $E_\Omega(\boldsymbol{\alpha})$ の臨界点を与える鞍点の存在は変分法の観点からも興味ある問題である．

多変量正規分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ の鞍点は $\boldsymbol{\alpha}_N(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\mu})$ である．従って多変量正規分布の場合その分散共分散行列の逆行列は，写像 $\boldsymbol{\alpha}_N : \mathbb{R}^k \to \mathcal{M}_N$ の微分に関する表現行列 (ヤコビ行列) に相当する．また集合 $\{\boldsymbol{\alpha}_N \in \mathscr{A} : (\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\}$ は多様体 $\mathcal{M}_F$ の接束を成す．さらに鞍点と確率分布の一意性，及びユークリッド計量の下で鞍点が調和写像となるような確率分布は，多変量正規分布に限られることが予想される．この意味において正規分布は極めてユークリッド的な確率分布であると言えよう．

3. 鞍点と多変量中心極限定理

確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ に対応するキュムラント母関数を $K_{\boldsymbol{X}}$ とすれば，$\boldsymbol{X}$ の鞍点 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})$ は $K_{\boldsymbol{X}}$ のルジャンドル変換 $K^*_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{dom}K_{\boldsymbol{X}}}\{\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{\alpha}\rangle - K_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\alpha})\}$ の導関数として得られる．このとき $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})$ の逆関数を $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\alpha})$ とすれば，独立な k 次元確率ベクトルに関する統計量 $\boldsymbol{S}_n = \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$ に対応する鞍点の逆関数は $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{S}_n}(\boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{n}\,\{\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\alpha}/\sqrt{n}) - \boldsymbol{\mu}\}$ と書ける．従って $\boldsymbol{S}_n$ の漸近正規性は各点 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k$ における収束 $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{S}_n}(\boldsymbol{\alpha}) \to \boldsymbol{\Sigma\alpha}$ (as $n \to \infty$) により評価される．このことは写像 $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{S}_n}$ が定義する多様体 $\mathcal{M}_{\boldsymbol{S}_n}$ の曲率によって多変量中心極限定理が特徴づけられる事を意味する．

参考文献

[1] 竹内 宏行 (2017). Lévy の反転公式と鞍点近似法の比較, 日本統計学会誌 第 46 巻.

[2] 竹内 宏行 (2015). 確率分布の sp-変換, 日本統計学会誌 第 45 巻.

[3] 竹内 宏行 (2013). 鞍点と確率分布の対応について, 日本統計学会誌 第 42 巻.