

高頻度観測の下での Lévy 密度のノンパラメトリック推定と ブートストラップ法による confidence band の構成

東京大・経済・院 栗栖大輔

東京大・経済 加藤賢悟

1 はじめに

計量ファイナンスにおける高頻度データ分析では、資産価格や金利、為替の変動などを連続時間の確率過程のモデルを用いて説明する際にジャンプの存在が重要な役割をもつ (Ait-Sahalia and Jacod (2014)). 実際のデータを見ると、その増分は非正規性をもつことが知られている。従ってサンプルパスがジャンプをもつ確率過程を考えることで Brown 運動などの拡散過程では説明できない変動を捉えることが出来る。一方、Lévy 過程はジャンプをもつ確率過程としては基本的なクラスであり、数理ファイナンスでは資産価格等のモデルとしてよく知られている。

2 研究内容

$L = (L_t)_{t \geq 0}$ を Lévy 過程とすると、Lévy-Khinchin 表現から L_t は以下の特性関数 $\varphi_t(u) = E[e^{iuL_t}]$ ($u \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$) をもつ:

$$\varphi_t(u) = \exp \left\{ t \left(-\frac{u^2 \sigma^2}{2} + iu\gamma + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux1_{[-1,1]}) \nu(dx) \right) \right\}.$$

上記の表現における (σ^2, γ, ν) は Lévy triplet と呼ばれ、Lévy 過程の法則を一意に特徴づけることが知られている。特に ν は Lévy 測度と呼ばれ、ジャンプの挙動を記述する。本報告では Lévy 測度が Lévy 密度 ρ をもつと仮定し、Lévy 過程を高頻度離散観測する状況における Lévy 密度のノンパラメトリックな推定を考える。具体的には $1/\Delta > 0$ を観測頻度とし、 $L_\Delta, L_{2\Delta}, \dots, L_{n\Delta}$ を観測データとする。このとき、 $\Delta \rightarrow 0, n\Delta \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) という設定の下で以下のスペクトル推定量を考える:

$$\hat{\rho}(x) = \frac{1}{2\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \left(\frac{(\hat{\varphi}_\Delta(u))^2 - \hat{\varphi}_\Delta'(u)\hat{\varphi}_\Delta(u)}{\Delta \hat{\varphi}_\Delta^2(u)} - \hat{\sigma}^2 \right) \varphi_W(uh) du.$$

ここで $\hat{\varphi}_\Delta$ は L_Δ の経験特性関数、 φ_W は適当なカーネル関数、 $h = h_n \rightarrow 0$ はバンド幅。また本報告ではブートストラップ法に基づく Lévy 密度に対する confidence band の構成法を提案し、その漸近的な妥当性を保証する理論的な結果を与え、この結果が適用可能な Lévy 過程の例を紹介する。最後に数値実験の結果を報告するとともに Bissantz et al. (2007) のアイデアを利用した、推定量に対する実用的なバンド幅の選択法を述べる。

参考文献

- Ait-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2014). *High-Frequency Financial Econometrics*. Princeton University Press.
- Bissantz, N., Dümbgen, L., Holzmann, H., and Munk, A. (2007). Non-parametric confidence bands in deconvolution density estimation. *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* **69** 483-506.
- Kato, K. and Kurisu, D. (2017). Bootstrap confidence bands for spectral estimation of Lévy densities under high-frequency observations. arXiv1705.00586.