ガウス型通信路モデルにおける信号のミニマックス予測分布

東京大・情報理工　矢野 恵佑
東京大・情報理工, 理研・脳科学総合研究センター　駒木 文保

1 概要

ガウス型通信路モデルにおける信号予測を考え，送信信号の滑らかさが既知の場合の信号に対する漸近ミニマックス予測分布を構成する．また，送信信号の滑らかさが未知の場合にも漸近ミニマックス最適になる予測分布を構成する．

2 信号のミニマックス予測分布

以下のような信号の分布予測を考える．ある信号を二種類のガウス型通信路を通して送信する．片方の通信路を通して得た受信信号をもとに，もうひとつの通信路を通して得る受信信号の分布を予測する．送信する信号には滑らかさが仮定されるとする．

我々は上記の予測を次のような l_2 の予測に帰着して考える．すなわち，w と $\tilde{w}$ を $\mathbb{R}^\infty$ 上のガウス分布 $\otimes_{i=1}^{\infty}\mathcal{N}(0,1)$ に従う独立な確率変数とし，ϵ と $\tilde{\epsilon}$ を既知の正数とした時に，$x=\theta+\epsilon w$ に従う x を観測し，$y=\theta+\tilde{\epsilon}\tilde{w}$ に従う y の分布を予測することを考える．x の従う分布を P_θ と書き，y の従う分布を Q_θ と書く．ここで，θ は非零な増加列 $a=(a_1,a_2,\cdots)$ および正数 C を利用した l_2 のコンパクトな部分集合

$$\Theta(a,C)=\{\theta\in l_2:\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\theta_i^2\leq C\} \tag{1}$$

の元とする．予測分布とは観測 x をもとに構成した $\mathbb{R}^\infty$ 上の確率分布のことである．

本発表では，[1] の結果の拡張として，増加列 a および C が既知である場合に Kullback–Leibler risk の意味で漸近ミニマックスを達成する予測分布を構成する．すなわち，$\mathcal{D}$ を予測分布全体として

$$\begin{aligned}&\inf_{\hat{Q}(\cdot;X)\in\mathcal{D}}\sup_{\theta\in\Theta(a,C)}\int\log\frac{\mathrm{d}Q_\theta}{\mathrm{d}\hat{Q}(\cdot;X=x)}(y)Q_\theta(\mathrm{d}y)P_\theta(\mathrm{d}x)\\ =\;&(1+\mathrm{o}(1))\sup_{\theta\in\Theta(a,C)}\int\log\frac{\mathrm{d}Q_\theta}{\mathrm{d}\hat{Q}_{\mathrm{minimax}}(\cdot;X=x)}(y)Q_\theta(\mathrm{d}y)P_\theta(\mathrm{d}x)\ \text{as}\ \epsilon\to0 \end{aligned}\tag{2}$$

を満たす予測分布 $\hat{Q}_{\mathrm{minimax}}(\cdot;X)$ を構成する．さらに，増加列 a および C が未知の場合に，どの a および C に対しても漸近ミニマックスを達成する予測分布の構成法についても紹介する．

参考文献

[1] Xu, X. and Liang, F. (2010), Asymptotic minimax risk of predictive density estimation for non-parametric regression. Bernoulli 16, pp. 543–560.