量子統計における測定の閉凸部分集合

大阪大学・基礎工　田中 冬彦

近年, 局所漸近正規性 [3] や統計的決定理論におけるミニマックス定理 [2] など, 数理統計で古くから知られている結果が量子統計に拡張されている. しかし, これらの成果の多くは, 理論的な興味が強く実際の量子物理実験との間にギャップがある. 本研究ではこのギャップを埋めるため, 量子統計的決定理論において測定の閉凸部分集合という概念を提案する.

注目している量子系はヒルベルト空間（可分）上の密度作用素 ($\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\rho = 1$) で記述する. コンパクト距離空間 Θ から密度作用素の空間への関数として, 量子統計モデル $\rho(\theta)$ を定義する. 決定空間 U もコンパクトな距離空間を仮定する. ただし, 量子統計では決定関数を定めず, 正作用素に値をもつ U 上の測度 (POVM)$\mathbf{M}$ の全体 $\mathcal{P}o(U)$ を考える.（詳細は例えば Holevo [1].）また, 損失関数を $\Theta \times U$ 上で下に有界な下半連続関数 $w(\theta, u)$ にとる. ただし, $w = +\infty$ もとりえる. このとき, 任意の POVM $\mathbf{M} \in \mathcal{P}o(U)$ についてリスク関数 $R_{\mathbf{M}}(\theta) := \int_U w(\theta, u)\mathrm{Tr}\rho(\theta)M(\mathrm{d}u)$ が定義される.

従来はリスク関数について $\mathcal{P}o(U)$ の中でミニマックス POVM やベイズ POVM などが調べられてきた. しかし, $\mathcal{P}o(U)$ は理論的に許される測定全体を数学的に表現したものであり, 実際の実験で実現できる測定全体に比べてはるかに広いことが多い. そこで, 本研究では, 実際の実験で可能な測定に関する情報を閉凸部分集合 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}o(U)$ で表現し, $\mathcal{P}$ に制限して考えることを提案する.

具体例として 2 値の量子識別問題 ($\dim \mathcal{H} < \infty$) を取り上げる. 実験的に準備された系が 2 種類の密度行列 ρ_0, ρ_1 のいずれかで記述されるとし, $\Theta = U = \{0, 1\}$, 0-1 損失をとることとする. U 上の POVM は $\{M, I - M :\ 0 \leq M \leq I\}$ であるが, 簡単のためエルミート行列の部分集合 $\{M :\ 0 \leq M \leq I\}$ を $\mathcal{P}o(U)$ とかく. $\mathcal{P}o(U)$ でベストな POVM は

$$T_{opt} = \arg \max_{T \in \mathcal{P}o(U)} \mathrm{Tr}T(\rho_1 - \rho_0) = \{\rho_1 - \rho_0 > 0\}$$

で与えられる (量子尤度比検定). ここで $\{X > 0\}$ は長岡の記号とよばれエルミート行列 X の正の固有空間への射影子を表す. さて, 実際には n サンプル, つまり, $\rho_0^{\otimes n}, \rho_1^{\otimes n}$ に対する POVM($\mathcal{H}^{\otimes n}$ の行列.) を考える. しかし, $T_{opt} = \{\rho_1^{\otimes n} - \rho_0^{\otimes n} > 0\} \in \mathcal{P}o(U)$ は n が大きい場合, 実験的にはほぼ不可能である. そこで, 実験で容易に実現できる測定として, たとえば $\mathcal{P}o(U)$ の閉凸部分集合

$$\mathcal{P}_{exp} = \mathrm{co}\{T^{(n)} = \sum_{x_1, \ldots, x_n} u(x_1, \ldots, x_n) E_{x_1} \otimes \cdots \otimes E_{x_n} :\ \{E_x\}\ \text{は射影測定}\ \} \subset \mathcal{P}o(U)$$

を考える. そして, $\mathrm{Tr}T^{(n)}(\rho_1^{\otimes n} - \rho_0^{\otimes n})$ を $T^{(n)} \in \mathcal{P}_{exp}$ で最大化する. この最大化は解析的には解けないが数値的には容易に解ける (講演で数値例やアルゴリズムを紹介する). もちろん, このような T_{opt} は $n = 1$ で最適な測定を n 回繰り返すよりも一般に性能が良く, また, 実際の実験で容易に実現できる.

REFERENCES

[1] A. S. Holevo: Investigations in the general theory of statistical decisions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **124** (1976) (In Russian). AMS Transl. (1978).

[2] F. Tanaka: Quantum Minimax Theorem, arXiv: quant-ph/1410.3639

[3] K. Yamagata, A. Fujiwara and R. D. Gill: Quantum local asymptotic normality based on a new quantum likelihood ratio. *Ann. Statist.* **41** (2013), pp. 2197–2217.