順序がある２つの正規母平均の推定ー分散共分散行列が既知の場合

目白大学　張　元宗　　　慶應大学　篠崎 信雄

主旨：　２次元正規分布の分散共分散行列が既知で、母平均に順序制約がある場合の母平均の推定問題を考える。この問題に対して、Hwang, Peddada(1994) または、Peddada, Dunson と Tan(2005) が提案した推定量の妥当性はあまり明らかにされていないため、ここでは、確率優越性の評価の基準の下で、制約条件を満たす最尤推定量が Hwang, Peddada(1994)、または Peddada ら (2005) が提案した推定量より優れていることを明らかにした。また、Pitman nearness の評価基準の下でも同様な結果が得られた。

1．はじめに：　$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)' \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従い、分散共分散行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

は既知で、$|\rho| \neq 1$、 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ とし、$\mu_i, i = 1, 2$ に順序制約, $\mu_1 \leq \mu_2$, がある場合 $\mu_i, i = 1, 2$ の推定を考える。$\rho = 0$ の場合、μ_i の最尤推定量は

$$\hat{\mu}_1 = \min\left\{\bar{X}_1, \frac{\sigma_2^2\bar{X}_1 + \sigma_1^2\bar{X}_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right\},\ \hat{\mu}_2 = \max\left\{\bar{X}_2, \frac{\sigma_2^2\bar{X}_1 + \sigma_1^2\bar{X}_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right\}. \tag{1.2}$$

である。$\rho \neq 0$ の場合、Hwang, Peddada (1994) は $\hat{\mu}_i$ を拡張、$\boldsymbol{\mu}$ の推定量

$$\hat{\mu}_1^{HP} = \min\left\{\bar{X}_1, \alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2\right\},\ \hat{\mu}_2^{HP} = \max\left\{\bar{X}_2, \alpha\bar{X}_1 + \beta\bar{X}_2\right\}. \tag{1.3}$$

を提案、 $\hat{\mu}_i^{HP}$ は確率的に $\bar{X}_i, i = 1, 2$ より優れていることを証明した。ここで、 $\alpha = \omega_1/(\omega_1 + \omega_2)$, $\beta = \omega_2/(\omega_1 + \omega_2)$、$\omega_1 = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$, $\omega_2 = \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$, $|\rho| \neq 1$ であるので、 $\omega_1 + \omega_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(1-\rho)\sigma_1\sigma_2 > 0.$ である。Peddada, Dunson と Tan (2005) は $\omega_1\omega_2 < 0$ の場合、推定量 $\hat{\mu}_i^{HP}, i = 1, 2$ は一致推定量にならないことに気づき、$\hat{\mu}_i^{HP}$ を次のように修正し、確率的に $\bar{X}_i$ より優れることを証明した。

$$\hat{\mu}_1^{PDT} = \min\left\{\bar{X}_1, \alpha^*\bar{X}_1 + \beta^*\bar{X}_2\right\},\ \hat{\mu}_2^{PDT} = \max\left\{\bar{X}_2, \alpha^*\bar{X}_1 + \beta^*\bar{X}_2\right\}, \tag{1.4}$$

ここで、 $\alpha^* = \omega_1^+/(\omega_1^+ + \omega_2^+)$, $\beta^* = \omega_2^+/(\omega_1^+ + \omega_2^+)$, $a^+ = \max\{a, 0\}$. しかし、提案した両推定量の妥当性はあまり調べていないため、ここでは、制約条件を満たす $\boldsymbol{\mu}$ の最尤推定量

$$\hat{\mu}_1^{MLE} = \bar{X}_1 - \beta(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+,\ \hat{\mu}_2^{MLE} = \bar{X}_2 + \alpha(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \tag{1.5}$$

と両推定量 $\hat{\mu}_i^{HP}, \hat{\mu}_i^{PDT}$ との比較を行い、両推定量より確率的に優れていることを明らかにする。
まず、３推定量の相違を次ぎのように、明らかにする。

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\boldsymbol{\omega} \in R^2 | \omega_1 + \omega_2 > 0, \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0\}, \\ D_2 &= \{\boldsymbol{\omega} \in R^2 | \omega_1 + \omega_2 > 0, \omega_2 < 0\}, \\ D_3 &= \{\boldsymbol{\omega} \in R^2 | \omega_1 + \omega_2 > 0, \omega_1 < 0\}. \end{aligned}$$

とすると 3 推定量は関係はつぎのように整理される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \in D_1 : &\hat{\mu}_1^{MLE} = \hat{\mu}_1^{HP} = \hat{\mu}_1^{PDT} = \bar{X}_1 - \beta(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \\ &\hat{\mu}_2^{MLE} = \hat{\mu}_2^{HP} = \hat{\mu}_2^{PDT} = \bar{X}_2 + \alpha(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \\ \boldsymbol{\omega} \in D_2 : &\hat{\mu}_1^{MLE} = \bar{X}_1 - \beta(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \hat{\mu}_1^{HP} = \bar{X}_1 + \beta(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)^+, \hat{\mu}_1^{PDT} = \bar{X}_1; \\ &\hat{\mu}_2^{MLE} = \hat{\mu}_2^{HP} = \bar{X}_2 + \alpha(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \hat{\mu}_2^{PDT} = \bar{X}_2 + (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \\ \boldsymbol{\omega} \in D_3 : &\hat{\mu}_1^{MLE} = \hat{\mu}_1^{HP} = \bar{X}_1 - \beta(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \hat{\mu}_1^{PDT} = \bar{X}_1 - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+; \\ &\hat{\mu}_2^{MLE} = \bar{X}_2 + \alpha(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^+, \hat{\mu}_2^{HP} = \bar{X}_2 - \alpha(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)^+, \hat{\mu}_2^{PDT} = \bar{X}_2. \end{aligned}$$

２．結果：　**定理１．** $\hat{\mu}_i^{MLE}$ は確率的に $\hat{\mu}_i^{HP}, i = 1, 2,$ より優れている。つまり、すべての $d > 0,$ に対して、

$$P_r\{|\hat{\mu}_i^{MLE} - \mu_i| < d\} \geq P_r\{|\hat{\mu}_i^{HP} - \mu_i| < d\}$$

が成立する。
定理 2.　$\hat{\mu}_i^{MLE}$ は確率的に $\hat{\mu}_i^{PDT}, i = 1, 2,$ より優れている。つまり、すべての $d > 0,$ に対して、

$$P_r\{|\hat{\mu}_i^{MLE} - \mu_i| < d\} \geq P_r\{|\hat{\mu}_i^{PDT} - \mu_i| < d\}$$

が成立する。

Pitman nearness の評価基準の下でも同様な結果が得られた。