形状制約と変化点仮説への総合的接近法
―対立仮説の下での分布変化点信頼集合―

明星大学　広津千尋
北里大学　鶴田陽和

１．序論

１母数指数分布族からの独立な変数系列に関して，自然母数に形状制約を想定し，それを線形制約仮説(凸多面錘)として表現する．この時，そのコーナーベクトルは各種形状制約に対応する変化点対比を形成し，それに対する最大対比型検定統計量が形状仮説と変化点仮説の両方に適切な統計量となる (Hirotsu, Biometrika 1982; Hirotsu & Marumo, Scand. J. Statist. 2002). これにより，単調仮説，凸性仮説，Ｓ字性仮説等の形状制約とそれぞれに対応する段差変化，スロープ変化，変曲点モデル等を一貫した手法で扱うことが出来る．本論では, このうち凸性仮説とスロープ変化点モデルに対する最大対比統計量の対立仮説の下での分布と，変化点信頼集合形成のための条件付き分布の定式化を行う．

２．モデル，および従来の結果

観測点$(x_1,\dots,x_n)$で観測されたデータ$\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)$の各成分が互いに独立に２項分布 $\mathrm{B}(n_i,p_i)$に従うものとする．ここで，ロジット$\theta_i=\log\left(p_i/(1-p_i)\right)$に関し，凸性仮説 $\mathrm{H_C}$: $L_n'\boldsymbol{\theta}\geq\boldsymbol{0}$を想定する．ただし，２階差分行列$L_n'$は$x_i$の関数としてHirotsu & Marumo (2002)に与えられている．帰無仮説: $L_n'\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{0}$は$\boldsymbol{\theta}$の線形性: $\theta_i=\beta_0+\beta_1x_i$を意味する. この検定の完全類 (Hirotsu, 1982)から示唆される統計量のうち，２重累積和統計量　$S_i=(x_{i+1}-x_1)y_1+(x_{i+1}-x_2)y_2+\cdots+(x_{i+1}-x_i)y_i$, $i=1,\dots,n-2,$ の規準化最大統計量 s_m^*を考える．その十分統計量(S_{n-1},S_n)を与えた条件付き帰無分布が以下のように得られている．まず，S_kの２階マルコフ性から$\boldsymbol{y}$の同時分布が条件付き分布$f_k(S_k|S_{k+1},S_{k+2}), k=1,\cdots,n-2,$ の積に分解される．ここで，S_k^*をS_kの規準化統計量として条件付き確率$F_k(S_{k-1},S_k,d)=\Pr(S_1^*<d,\cdots,S_k^*<d|S_{k-1},S_k)$を定義すると，その漸化式

$$F_{k+1}(S_k,S_{k+1},d)=\sum_{S_{k-1}}F_k\,(S_{k-1},S_k,d)\times f_{k-1}(S_{k-1}|S_k,S_{k+1}), k=1,\cdots,n-2. \quad (1)$$

が得られ，最大統計量 s_m^*の分布関数がその最終ステップで得られる(広津，応用統計学 2013)．

３．対立仮説の下での定式化

時点 k でのスロープ変化量をΔとした時の分布論は，上記の分布論において k 番目のf_kのみ $f_k^*(S_k|S_{k+1},S_{k+2})=f_k\times\exp(\Delta S_k)$と変更すればよい．この式からも$S_k$が当該問題における基本統計量であることが分かる．漸化式(1)もこの変更のみで有効である．

４．変化点信頼集合形成のための条件付き分布

変化点信頼集合は真の変化点をk^*とした帰無仮説検定で棄却されないk^*の集合として求められる．Worsley (Biometrika 1986)が段差変化点の信頼集合を求めた際に行ったのと同様に, S_{k^*}を与えた条件付き分布を基にすることにより，Δの影響を除去することが出来る．その場合，最大検定統計量の分布は(1)式を，S_{k^*}を観測値に固定して走らせることによって得られる．

５．結語

本論の手法の検出力は，これまでシミュレーションによって検討している．本論はその条件付き正確検出力を与える．変化点集合の振る舞いについては新たにシミュレーション結果，および実際問題への適用例を当日報告する．