ベイズ尤度による情報量規準の拡張と改良

統計数理研　　柳本 武美
九州　大学　　大西 俊郎

1．序.

Spiegelhalter ら (2002, p168) は無情報事前密度の下で DIC が AIC と一致することがあることを指摘している。情報量規準 BIC はサイズ１の標本相当の情報量を含む事前情報を仮定したときの周辺尤度で近似されることが知られている (例えば Kass and Raftery, 1995)。これらの主張は、ベイズモデルの評価規準が既存の情報量規準と符合するとの文脈でなされている。

この事実を逆に見ることができる。対数周辺尤度と $-0.5 \times \mathrm{DIC}$ は対数ベイズ尤度と見ることができる。従って、AIC と BIC は事前分布なしに導入されたベイズ尤度の近似法になる。そうすると、適切な事前分布の仮定が可能になるベイズ法の方が優れている上に、広範な拡張が可能であることを意味している。

2．ベイズ尤度による説明.

標本密度を $p(x|\,\theta)$ 事前密度を $\pi(\theta)$ とする。また、y を x と同じ標本空間を上の将来 (未観測) の標本とする。様々な予測子 (Corcuera and Giummole, 1999) の一つである $p_e(y|x) \propto \exp \mathrm{E}\{\log p(y|\theta|\pi(\theta|x)\}$ に基づいて DIC の特定版が導入できる (Yanagimoto and Ohnishi, 2011)。また、周辺尤度はベイズ尤度の一つである。従って、AIC と BIC は極めて限定された事前密度間の比較を限られたベイズ尤度を用いて行っていると説明できる。

この説明から二つの問題点が指摘される。周辺尤度は事前密度による混合による導出される予測子 $m(y) = \mathrm{E}\{p(y|\theta); \pi(\theta)\}$ と関連して、その観測予測子 $m(x)$ である。AIC は無情報事前密度と関係している。無情報事前密度の役割についての議論 (Yanagimoto and Ohnishi, 2014) が困難である。当然何らかの事前情報はあるはずだからである。余り現実的でない事前密度に限定することなく、実際に即してより広い視点から事前密度の仮定が可能になる。。

3．改良と拡張.

ベイズ尤度による説明を通じて AIC と BIC を改良する。a) 母数の推定は最尤推定量が用いられる。特に AIC では定義自身に最尤推定量が含意されている。ベイズ法ではベイズ推定量に基づくので、最適性を満たし最尤推定量より良い推定量である。b) 調整項は大雑把な漸近的性質が用いられているが、ベイズ尤度では精密な議論が可能であり近似を用いる場合もその理由を議論できる。

また、拡張が可能になる。c) ベイズ尤度に基づいた最尤推定量、尤度比検定統計量が導入できる。MAICE はベイズ尤度に基づいた最尤推定値と見なされる。実際最後の ’E’ は選択ではなくて推定値 (estimate) である。情報量規準が本質的に推定のための規準であることを示唆している。d) ベイズ尤度は多様に定義が可能である。もう一つのごく自然な予測子は $p_m(y|x) = \mathrm{E}\{p(y|\theta); \pi(\theta|x)\}$ で定義される。この予測子に基づいたベイズ尤度も原理的に定義可能である。指数分布族と混合分布族に現れる双対性への対応である。

文献：[1] Corcuera, J. M. and Giummole F. (1999). Scand. J. Statist., 26, 265-279. [2] Kass, R.E. and Raftery, A.E. (1995). J. Am. Statist. Assoc., 90, 773-795. [3] Spiegelhalter, D.J. *et al.* (2002). J. Roy. Statist Soc. B, 64 583- 639. [4] Yanagimoto, T. and Ohnishi, T. (2011). J. Statist. Plann. Inf., 41, 1990-2000. [5] Yanagimoto, T. and Ohnishi, T. (2014). Ann. Inst. Statist. Math., 66, 789-809.