縮小推定の展開 – 小地域推定と高次元問題 –

東京大学　久保川達也

縮小推定の理論研究は Stein(1956) の非許容性の証明に始まる。それは，平均の異なる k 個の正規母集団からのランダム標本に基づいて k 個の平均を同時に推定する問題を考えると，$k \geq 3$ のとき標本平均は非許容的となり縮小推定量によって改良されるというものである。この結果は多くの理論家の興味を引き，Stein(1973) による Stein identity の導入により 1970 年代 80 年代に大発展した。一方，応用的側面については，Efron-Morris(1975) で扱われた例に有用性を見出すことができる。1 つはメジャーリーグの野手の最終打率を開幕 30 打席の成績に基づいて推定した例で，全体平均へ縮小することにより，開幕当初にたまたま成績が良かったり悪かったりする変動を軽減する推定値が得られる。2 つ目はある国の伝染病の発生率の推定の例で，人口の少ない地域の発生率についてはバラツキが大きくなる傾向にあるが，縮小推定を行うことにより合理的な推定値が得られる。

実は，縮小推定の有用性は 1950 年代には遺伝学の分野で認識されていた。Henderson(1950) の論文では，家畜育種学の分野で個体のもつ遺伝的能力などの推定を行うために線形混合モデル (LMM) を利用して最良線形不偏予測量 (BLUP) を導いている。BLUP にモデル母数の推定量を代入したものが経験最良線形予測量 (EBLUP) であるが，これは Efron-Morris で扱われた縮小推定量そのものである。次第に線形混合モデルの有用性が広く認識され，またベイズモデルとの関連においてベイズ推測の理論と計算方法についての顕著な発展に伴い，LMM と EBLUP は現在では実に広い分野で利用されている。その 1 つの例が小地域推定の問題である。また近年は高次元での推測問題においても縮小推定が役立つことが認識されている。ここでは，このように発展してきた縮小推定の内容を，理論と応用の両面から概観したい。

[1] 理論的な展開　多変量正規分布の平均ベクトルの推定やウィッシャート分布の共分散行列の推定において強力な道具が Stein identity や Stein-Haff identity であり，これらを用いて改良する推定量のクラスを構成することができる。Konno(2009) では高次元モデルへ適応可能な identity の導出を行い，縮小推定の高次元への拡張を行った。また Komaki(2001,04) に代表される予測分布の予測問題への拡張や Kubokawa(1994) の IERD 法に基づいた改良する推定量の構成などを紹介する。

[2] 小地域推定　地域の差異を変量効果として取り込んだ線形混合モデルや計数データを扱うパアソン-ガンマモデル，2 項-ベータモデルにおいては，小地域平均の自然な推定法として縮小推定量が得られる。ベンチマーク問題に対応する制約付きベイズ推定の導出など最近の話題も含めて紹介する。

[3] 高次元問題　高次元解析において問題になるのが共分散行列の逆行列の推定で，次元が標本サイズより大きいときには標本共分散行列の逆行列を考えることができない。そこで共分散行列の線形縮小推定量が考えられる。これは正規性を仮定したときのベイズ推定量として特徴づけられが，超母数もしくは線形推定の weight をノンパラメトリックに推定することにより，非正規分布のもとでも安定した推定量が得られる。最近では random matrix 理論を用いた非線形縮小推定法の開発がなされている。