

ベータ型の分布を用いたシリンダー分布

南山大学 阿部俊弘

(風向, 風力) の組のような角度と大きさの組のデータはシリンダー上のデータとみなすことができる. このようなデータの例は Breckling (1989) 等で見ることができる. 本報告では, 既存の円周分布と実軸上の分布を組み合わせ, 新しいシリンダー分布を構成する: 確率変数 $X (\in \mathbb{R})$ の密度関数を $f_X(x)$, 円周上の確率変数 $\Theta \in [-\pi, \pi)$ のパラメータ ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) を持つ密度関数を $f_\Theta(\theta; \rho)$ とし, さらに, 関数 g を $g: \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ とする. このとき, $f_\Theta(\theta; \rho g(x))$ も円周上の確率密度関数となることから,

$$f(\theta, x) = f_\Theta(\theta; \rho g(x)) f_X(x), \quad (\theta, x) \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \quad (1)$$

はシリンダー上の分布の確率密度関数となる. 確率変数 X の周辺分布は $f_X(x)$ であるから, $X = x$ の条件付き分布 $\Theta|(X = x)$ は

$$f(\theta|x) = \frac{f_\Theta(\theta; \rho g(x)) f_X(x)}{f_X(x)} = f_\Theta(\theta; \rho g(x))$$

となる. (1) において, $f_\Theta(\theta; \rho g(x))$ を集中パラメータが ρx である sine-skewed wrapped Cauchy 分布の密度関数, $f_X(x)$ を Kumaraswamy 分布の密度関数とした

$$f(\theta, x) = \frac{\alpha \beta x^{\alpha-1} (1-x)^\beta (1 - (\rho x)^2) (1 + \lambda \sin \theta)}{2\pi \{1 + (\rho x)^2 - 2\rho x \cos \theta\}}, \quad (\theta, x) \in [-\pi, \pi) \times [0, 1] \quad (2)$$

を考える. ここで, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \leq \rho < 1$ かつ $-1 \leq \lambda \leq 1$ である. 位置パラメータ $-\pi \leq \mu < \pi$ は $\theta \mapsto \theta - \mu$ として導入される. 確率変数 X の周辺分布は Kumaraswamy 分布となり, $X = x$ の条件付き分布 $\Theta|(X = x)$ は

$$f(\theta|x) = \frac{1 + \lambda \sin \theta}{2\pi} \frac{1 - (\rho x)^2}{1 + (\rho x)^2 - 2\rho x \cos \theta}$$

となる. $n = 1, 2, \dots$ と $m = 1, 2, \dots$ に対して, 三角モーメントは

$$E[X^n e^{im\Theta}] = \rho^m E[X^{n+m}] + i \frac{\lambda}{2} (\rho^{m-1} E[X^{n+m-1}] - \rho^{m+1} E[X^{n+m+1}])$$

により与えられる. ここで, ($\mu = 0$ のときの) wrapped Cauchy 分布の m 次のモーメントが

$$E[e^{im\Theta}] = \rho^m + i\lambda \frac{\rho^{m-1} - \rho^{m+1}}{2}$$

であることを用いた (Abe and Pewsey, 2011).

(2) の分布の利点として, 乱数生成が容易であること, 条件付き分布 $\Theta|(X = x)$ のモードが陽的な形で与えられることが挙げられる. この分布をシリンダーデータに対して当てはめた例は当日報告する.

参考文献

- [1] Abe, T. and Pewsey, A. (2011). Sine-skewed circular distributions. *Statistical Papers*, **52**, 683–707.
- [2] Breckling, J. (1989). *The analysis of directional time series: application to wind speed and direction*, Springer Verlag, Berlin.