空間斉次自己回帰モデルのフィッシャー情報量行列の正則条件

早稲田大学　力丸佑紀
（株）データサイエンスコンソーシアム，慶應義塾大学，早稲田大学　柴田里程

n 次元空間上の弱定常空間斉次自己回帰モデル

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{K}\subset\mathbb{Z}^n}\beta_{\mathbf{k}}X_{\mathbf{v}+\mathbf{k}}=\varepsilon_{\mathbf{v}},\ \ \varepsilon_{\mathbf{v}}\sim N(0,\sigma^2 I_n),\ \beta_{\mathbf{0}}=1$$

のフィッシャー情報量行列の極限 $I(\boldsymbol{\theta})$,

$$\{I(\boldsymbol{\theta})\}_{pq}=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint\frac{\partial\log f}{\partial\theta_p}\frac{\partial\log f}{\partial\theta_q}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega},\ p,q=1,2,\ldots,m \tag{1}$$

が，パラメータ値によっては，非正則になりうるという事実は，すでに一昨年度の本学会で報告した．ここで，m はパラメータ数，$f(\boldsymbol{\omega})$ はスペクトル関数である．本報告では，$I(\boldsymbol{\theta})$ が正則になるための必要十分条件をより具体的に調べた結果を報告する．

もっとも直接的には，正則性の必要十分条件は，グラジエント関数

$$\frac{\partial\log f}{\partial\theta_k},\ k=1,2,...,m$$

が線形独立であることになるが，これは実際には確かめにくい条件である．そこで，$I(\boldsymbol{\theta})$ の二次形式

$$Q=(\mathbf{y}^T,y_\sigma)I(\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ y_\sigma\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi^2}\iint\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{Y(z_1,\ldots,z_n)}{P(z_1,\ldots,z_n)}\right)-\frac{y_\sigma}{\sigma}\right\}^2\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

を用いれば，次のような必要十分条件が得られる．ただし，ここで $\boldsymbol{\theta}^T=(\boldsymbol{\beta}^T,\sigma^2)$（$\boldsymbol{\beta}$ は $\beta_{\mathbf{k}}$ を要素とし，添字を辞書式に並べたもの）で，$P(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{K}}\beta_{\mathbf{k}}z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$，$Y(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{\mathbf{s}\neq\mathbf{0}\in\mathcal{K}}y_{\mathbf{s}}z_1^{s_1}\cdots z_n^{s_n}$，$z_j=\mathrm{e}^{i\omega_j}$ である．そこで，$a_{\mathbf{s}}=y_{\mathbf{s}}-\frac{\beta_{\mathbf{s}}}{\sigma}y_\sigma$ と置けば

$$\sum_{\mathbf{s}}a_{\mathbf{s}}(\beta_{\mathbf{s}-\boldsymbol{\ell}}+\beta_{\mathbf{s}+\boldsymbol{\ell}})=0\ \mathit{for\ any}\ \boldsymbol{\ell}\implies a_{\mathbf{s}}=0\ \mathit{for\ any}\ \mathbf{s} \tag{3}$$

が正則性の必要十分条件となる．

さらに，添字が辞書式になるように $a_{\mathbf{s}}$ を並べたベクトルを $\mathbf{a}$，$\boldsymbol{\beta}$ の要素の添字を $+\boldsymbol{\ell}$ ずつずらしたものと $-\boldsymbol{\ell}$ ずつずらしたものの和をベクトル $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\ell}}$ で表せば，式 (3) の条件式は $\mathbf{a}^T\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\ell}}=0$ と書き換えられる．例えば，$P(z)=1+\beta_1 z+\beta_{-1}z^{-1}$ のとき，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,1,\beta_{-1})^T$ であり，

$$\boldsymbol{\beta}_0=\begin{pmatrix}2\beta_1\\ 2\\ 2\beta_{-1}\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\ \beta_1+\beta_{-1}\\ 1\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}\beta_{-1}\\ 0\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

である．弱定常性より，$P(z_1,\ldots,z_n)$ が $|z_1|=\cdots=|z_n|=1$ 上で 0 にならないことを用いれば，次のような正則性の必要十分条件が得られる．

定理　$I(\boldsymbol{\theta})$ が正則になるための必要十分条件は，$\dim\{\mathrm{Span}\{\beta_{\boldsymbol{\ell}}\ (\boldsymbol{\ell}\in\mathcal{L}),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}\}=m$

ここで $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ は $0,1$ 要素が規則的に並ぶ m 次元ベクトルであり，これは空間の次元 n やモデルの形によって異なる．例えば，1 次元 bilateral model の場合，$\mathbf{e}_1=(1,0,1,0,\ldots,1)^T,\mathbf{e}_2=(0,1,0,1,\ldots,0)^T$ である．特に，伝達関数が $P(z)=1+\beta_1 z+\beta_{-1}z^{-1}$ のときには，定理の $\boldsymbol{\beta}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ の線形独立性は $\beta_1\neq\beta_{-1}$ という単純な条件に帰着する．この条件は，$P(z)=0$ の 2 つの根の位置関係が変わる境界になっており，その境界で何が起きているのか，$I(\boldsymbol{\theta})$ の正則性にどう関わるのか，などさらに詳しく調べた結果を報告する．