微小なタイムラグあり相関をもつ Brown 運動の高頻度観測モデルの漸近構造

統計数理研究所リスク解析戦略研究センター　小池祐太

1　はじめに

本報告では, タイムラグあり相関をもつ Brown 運動の観測誤差つき高頻度離散観測データから, タイムラグの大きさを統計推測する問題を考える. タイムラグがある相関関係は, 金融データではリード・ラグ効果として知られており, 古くから研究テーマとなっている. 特に最近の実証研究では高頻度金融データには微小なタイムラグがある相関関係が存在することが指摘されている [2]. しかし, このような問題に対する統計モデルの理論的研究はあまりなく, 本研究はその方面に貢献することを目的としている.

2　モデル

$B_t = (B_t^1, B_t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ を 2 次元両側 Brown 運動で $B_0 = 0$, $E[|B_1^1|^2] = E[(B_1^2)^2] = 1$ および $E[B_1^1 B_1^2] = \rho$ を満たすものとする. ここに, $\rho \in (-1,1) \setminus \{0\}$ は相関パラメーターである. $\vartheta \in \mathbb{R}$ をタイムラグの大きさを表すパラメーターとし, 観測データ $\mathbf{Z}_n = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)^\top$ は

$$\begin{cases} X_i = B^1_{i/n} + \sqrt{\Upsilon_n}\epsilon^1_i, & Y_i = B^2_{i/n-\vartheta} + \sqrt{\Upsilon_n}\epsilon^2_i \quad \text{if } \vartheta \geq 0, \\ X_i = B^1_{i/n-\vartheta} + \sqrt{\Upsilon_n}\epsilon^1_i, & Y_i = B^2_{i/n} + \sqrt{\Upsilon_n}\epsilon^2_i \quad \text{if } \vartheta < 0 \end{cases}$$

で与えられるとする. ここに, $\Upsilon_n \geq 0$ は観測誤差の分散を表し, $\limsup_{n\to\infty} \Upsilon_n < \infty$ を満たすと仮定する. $\mathbf{Z}_n$ の分布を $\mathbb{P}_{n,\vartheta}$ で表す. このモデルは [1] で提案されたリード・ラグモデルの特殊な場合の観測誤差つきバージョンとなっている. 本報告では, $n \to \infty$ という漸近論を考えた際の, 適切に選ばれた 0 に収束する実数列 ϑ_n に対する尤度比 $\mathrm{d}\mathbb{P}_{n,\vartheta_n}/\mathrm{d}\mathbb{P}_{n,0}$ の漸近挙動を導出する. 特に, $\lim_{n\to\infty} n\Upsilon_n = \infty$ の場合は LAN の構造が現れ, そうでない場合は異なる構造が現れることを示す.

参考文献

[1] Hoffmann, M., Rosenbaum, M. and Yoshida, N. (2013). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data. *Bernoulli* **19**, 426–461.

[2] Huth, N. and Abergel, F. (2014). High frequency lead/lag relationships — empirical facts. *Journal of Empirical Finance* **26**, 41–58.