確率分布のsp-変換について

東京国際大学　竹内 宏行

1. はじめに

確率分布 F のキュムラント母関数 K_F に対し，そのルジャンドル変換

$$K_F^*(t) = \sup_{\alpha \in \mathrm{dom} K_F} \{t\alpha - K_F(\alpha)\}$$

において右辺の上限を達成する $\alpha = \alpha(t)$ は鞍点と呼ばれ，F と一意に対応する．ルジャンドル変換は座標変換を与える方法であり，力学や最適化理論等においてラグランジアンよりハミルトニアンを得る際 (あるいはその逆の場合) に用いられるが，鞍点はこの変換において黒衣の役割りを果たすのみで，その性質が詳しく研究されることはなかった．竹内 (2013) は確率分布との一意性・反転公式の存在・鞍点による統計量の漸近正規性等の証明を示した．特に鞍点は凸性を持つ狭義単調増加関数で，期待値の近傍の振る舞いのみで確率分布と一意に対応し，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の場合に限り直線 ; $\alpha(t) = (t-\mu)/\sigma^2$ となる著しい性質を有している．竹内 (2014) ではこの性質を利用し，統計量に関する鞍点の曲率 (sp-曲率 ; $\gamma_n^{(sp)}(t)$) により漸近正規性の十分条件を与えた．このような鞍点の曲がり具合が，対応する確率分布に関して持つ情報は十分 rich であると言える．

2. 鞍点の sp-変換

sp-変換は鞍点すなわち確率分布を，正規分布のモデル多様体 $\mathcal{M}$ 上の曲線 (sp-曲線) へ移す変換として定義される．この変換は “ 鞍点を包絡線とするような接線群を考える” というアイデアによって得られるが，指数型分布族に限らない広いクラスの確率分布を，フィッシャー計量が導入された $\mathcal{M}$ 上の曲正規分布として表現することが可能である．これにより基準化された標本平均 S_n の中心極限定理 $S_n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$ は，sp-曲線が $\mathcal{M}$ 上の 1 点に退化すること，すなわち sp-曲線の長さ $L_n(\delta)$ が 0 へ収束することにより捉えられる．

3. 結　論

$\mathcal{M}$ 上の sp-曲線は，鞍点 $\alpha(u)$ に関する次の表現によって得られる．

$$y = \frac{t - \{u - \alpha(u)/\dot{\alpha}(u)\}}{1/\dot{\alpha}(u)} \overset{sp.}{\sim} N\left(u - \frac{\alpha(u)}{\dot{\alpha}(u)}, \frac{1}{\dot{\alpha}(u)}\right) \quad \text{for} \quad |u - \mu| < \delta$$

sp-変換は写像として全単射である．鞍点を有する全ての確率分布は，母数が滑らかに変化する正規分布の族により生成される．sp-曲線の長さ $L(\delta)$ は $\mathcal{M}$ の座標系に依存せず

$$L(\delta) = \int_{|u-\mu| \le \delta} \frac{|\ddot{\alpha}(u)|}{\dot{\alpha}(u)} \left\{ \frac{(\alpha(u))^2}{\dot{\alpha}(u)} + \frac{1}{2} \right\}^{1/2} du$$

と書ける．統計量 S_n の $L_n(\delta) \to 0$ による漸近正規性の評価については報告の際に示す．

参考文献

[1] 竹内 宏行 (2015). 確率分布の sp-変換, (投稿中).
[2] 竹内 宏行 (2014). 鞍点の凸性と曲率について, 日本統計学会誌 第 44 巻.
[3] 竹内 宏行 (2013). 鞍点と確率分布の対応について, 日本統計学会誌 第 42 巻.