一様共分散構造をもつ成長曲線モデルに対する次数選択について

東京理科大・理　榎本　理恵

ここでは，成長曲線モデルにおける次数選択に関心がある．共分散行列に仮定をおかない一般の成長曲線モデルに対する変数選択問題については各漸近枠組のもとで規準量が提案されている．例えば，大標本漸近枠組ではSatoh，Kobayashi and Fujikoshi (1997) によって，高次元漸近枠組ではFujikoshi, Enomoto and Sakurai (2013) によって，大多群漸近枠組ではEnomoto, Sakurai and Fujikoshi (2013) によってAIC型およびCp型の規準量が与えら，それの一致性について論じられている．ここで，大標本漸近枠組とは時点数を固定して標本数が十分大きい漸近枠組，高次元漸近枠とは標本数・時点数がともに大きくなる漸近枠組，大多群漸近枠組とは標本数とグループ数が共に大きくなる漸近枠組のことである．そこで本報告では，共分散行列に一様共分散構造を仮定したもとでの次数選択について新たな規準量を提案し，その漸近的性質について考察する．

いま取り扱う成長曲線モデルを次のように表す．群の個数を q，観測した時点数を p とする成長曲線モデルでは，標本数 n として $n \times p$ の観測行列 $\mathbf{Y}$，$n \times q$ の個体間計画行列 $\mathbf{A}$，$k \times p$ の計測時点 t_i $(i = 1, \ldots, p)$ の関数として表せる個体内計画行列 $\mathbf{X}$ が与えられている．このとき，$(j-1)$ 次の多項式を仮定した成長曲線モデルを次のように表す．

$$\mathrm{M}_j : \mathbf{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}_j\mathbf{X}_j + \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \mathrm{N}_{n\times p}(\mathbf{O}_{n\times p}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}), \quad j = 1, \ldots, k$$

このとき，ここでは共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に次のような一様共分散構造を仮定する．

$$\boldsymbol{\Sigma}_u = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & \sigma^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \cdots & \rho & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2\{(1-\rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\} = \tau_1\left(\mathbf{I}_p - \frac{1}{p}G_p\right) + \tau_2\frac{1}{p}G_p.$$

ただし，$G_p = \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'/p,\ \tau_1 = \sigma^2(1-\rho),\ \tau_2 = \sigma^2\{1+(p-1)\rho\}$．ここで，$\boldsymbol{\Theta}_j$，$\tau_1$，$\tau_2$ は未知パラメータ，$\mathbf{X}_j$ は $\mathbf{X}$ の最初の j 個の行ベクトルを取り出した行列である．このようなモデル M_j を候補のモデルと呼び，とくにモデル M_k を完全モデルと呼ぶことにする．また，実際に $\mathbf{Y}$ が従っているモデルを真のモデル M_{j_0} と表す．このように数ある候補のモデルの中から最適なモデルを選ぶ問題が変数選択問題である．ここでは，真のモデル M_{j_0} が完全モデル M_k に含まれることを仮定する．また，個体間計画行列 $\mathbf{A}$ が q 個の説明変数の観測値であるモデルも同様に表すことができる．

このような一様共分散構造を仮定した成長曲線モデルにおいて，次数選択について新たな規準量を提案する．また，その規準量の各漸近枠組のもとでの漸近的性質について明らかにする．また数値シミュレーションによって今回得られた結果の妥当性を確認する．

参考文献

1. Enomoto, R., Sakurai, T. and Fujikoshi, Y. (2013). Consistency of AIC and its modification in the growth curve model under a large-(q, n) framework. *SUT Journal of Mathematics*, **49**, 93–107.

2. Fujikoshi, Y. , Enomoto, R. and Sakurai, T. (2013). High-dimensional AIC in the growth curve model. *Journal of Multivariate Analysis*, **122**, 239–250.

3. Satoh, K., Kobayashi, M. and Fujikoshi, Y. (1997). Variable selection for the growth curve model. *Journal of Multivariate Analysis*, **60**, 277–292.