一様および自己回帰共分散構造をもつ成長曲線モデルに関する高次元推測

東京理科大・理　榎本　理恵
諏訪東京理科大・共通教育センター　櫻井　哲朗
広島大・理・名誉教授　藤越　康祝

本報告では，共分散行列に構造を仮定したもとでの成長曲線モデルにおけるパラメータの推測に関心がある．ここでは，特に一様共分散構造と自己回帰共分散構造について考察する．

いま取り扱う成長曲線モデルを次のように表す．群の個数を q，観測した時点数を p とする成長曲線モデルでは，標本数 n として $n \times p$ の観測行列 $\mathbf{Y}$，$n \times q$ の個体間計画行列 $\mathbf{A}$，$k \times p$ の計測時点 t_i $(i = 1, \ldots, p)$ の関数として表せる個体内計画行列 $\mathbf{X}$ が与えられている．このとき，$(j-1)$ 次の多項式を仮定した成長曲線モデルを

$$\mathrm{M}_j : \mathbf{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}_j\mathbf{X}_j + \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \mathrm{N}_{n\times p}(\mathbf{O}_{n\times p}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}), \quad j = 1, \ldots, k$$

と表す．ここでは，$\boldsymbol{\Sigma}$ に以下のような構造を仮定する．

$$\text{一様共分散構造：} \ \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\{(1-\rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{1}\mathbf{1}'\}, \quad \text{自己回帰共分散構造：} \ \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2(\rho^{|i-j|})$$

このような構造のもとで，σ^2 と ρ に関する推測は重要な問題の 1 つである．

このとき，Fujikoshi, Kanda and Tanimura (1990) によって自己回帰共分散構造のもとで σ^2，ρ の最尤推定量が与えられている．これらの最尤推定量は，複雑な連立方程式の解として与えられるため，Fujikoshi, et al. (1990) では ρ の初期値を次の方程式の解とする反復法を提案している．ここで，$\mathbf{S}$ は $\mathrm{E}[\mathbf{Y}] = \mathbf{A}\boldsymbol{\Xi}$ としたときの通常の不偏推定量である．

$$(p-1)(\mathrm{tr}\mathbf{C}_1\mathbf{S})\rho^3 - (p-2)(\mathrm{tr}\mathbf{C}_2\mathbf{S})\rho^2 - (p\mathrm{tr}\mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathrm{tr}\mathbf{S})\rho + p(\mathrm{tr}\mathbf{C}_2\mathbf{S}) = 0$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは，MANOVA モデルのもとでの最尤推定量になっている．さらに，同論文では時点数を固定して標本数が十分大きい大標本漸近枠組のもとでの漸近分布も導出している．

そこで本報告では，以下のような標本数と時点数がともに大きくなる高次元漸近枠組のもとで σ^2，ρ の推定量および共分散構造の検定統計量の漸近分布を導出する．

$$\mathrm{A1:} \quad k : \text{固定}, \ n \to \infty, \ p \to \infty, \ p/n \to c \in [0, 1).$$

このとき，自己回帰共分散構造のもとでの ρ の推定量は簡便な推定量として先ほどの方程式の解，つまり MANOVA モデルのもとでの最尤推定量を用いて考察する．また，一様共分散構造のもとでは最尤推定量を用いて考察する．これらの考察により今回得られた結果の妥当性を数値シミュレーションによって確認する．

参考文献

1. Fujikoshi, Y., Kanda, T. and Tanimura, N. (1990). The growth curve model with an autoregressive covariance structure. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **42**, 533–542.