多項分布の適合度検定における不連続項を考慮した統計量の変換について

北海道教育大・釧路　　関谷　祐里
鹿児島大・理工　　種市　信裕

1. 多項分布の適合度検定における対数尤度比統計量と帰無分布の近似式

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ を多項分布 $M_k(n, \boldsymbol{\pi})$ に従う確率変数ベクトルとする。単純帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p}$ を検定するための対数尤度比統計量は

$$T = 2\sum_{j=1}^{k} X_j \log\left(\frac{X_j}{np_j}\right)$$

で与えられ，通常は極限分布である χ^2_{k-1} 分布に基づく近似検定がおこなわれている。

多項分布 $M_k(n, \boldsymbol{p})$ に従う確率変数を $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ とし，$Y_j = (X_j - np_j)/\sqrt{n}$ $(j = 1, \ldots, k)$, $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{k-1})'$ とおくと，T は $\boldsymbol{Y}$ の関数として，

$$T(\boldsymbol{Y}) = 2\sum_{j=1}^{k} (np_j + \sqrt{n}Y_j) \log\left(1 + \frac{Y_j}{\sqrt{n}p_j}\right)$$

と表現できる。**Siotani and Fujikoshi [1]** は，**Yarnold [3]** の定理を適用することにより，H_0 のもとでの T の分布の下側確率に対する漸近展開式を以下のように与えた。

$$\Pr\{T < c | H_0\} = J_1 + J_2 + J_3 + O(n^{-3/2})$$

ここで，J_1 は多変量エッジワース展開の項，J_2 と J_3 は不連続項であり，

$$J_1 = \Pr\{\chi^2_{k-1} < c\} + (12n)^{-1}\left(1 - \sum_{j=1}^{k} p_j^{-1}\right)\left[\Pr\{\chi^2_{k-1} < c\} - \Pr\{\chi^2_{k+1} < c\}\right] + O(n^{-3/2}),$$

$$\hat{J}_2 = \left\{e^c (2\pi)^{k-1} \prod_{j=1}^{k} p_j\right\}^{-1/2} n^{-(k-1)/2} \left\{N(c) - n^{(k-1)/2} V(c)\right\},$$

$N(c)$ は集合 $B(c) = \{\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{k-1})' : T(\boldsymbol{y}) < c\}$ に含まれる格子点の数, $V(c)$ は集合 $B(c)$ の体積である。

J_3 項は非常に複雑であることと $J_3 = O(n^{-1})$ であることから，**Siotani and Fujikoshi [1]** は $\Pr\{T < c | H_0\}$ に対する近似式として，$J_1 + \hat{J}_2$ を提案した。

2. 漸近展開の不連続項 $\hat{J}_2$ を考慮した統計量の変換

Ulyanov and Zubov [2] は，$k \geq 4$ のとき，$J_2 = \hat{J}_2 + O(n^{-1})$ と $J_2 = O(n^{-1+1/k})$ を示した。そこで，$k \to \infty$ のとき $\hat{J}_2$ のオーダーが $O(n^{-1})$ に近づくことから，本報告では，$\hat{J}_2$ の主要項を n^{-1} の項として形式的に表現し，T にバートレット型変換を施すことにより新たな検定統計量を構成した。

参考文献

[1] **M. Siotani and Y. Fujikoshi (1984),** *Hiroshima Math. J.*, **14, 115–124.**
[2] **V. V. Ulyanov and V. N. Zubov (2009),** *Hiroshima Math. J.*, **39, 133–161.**
[3] **J. K. Yarnold (1972),** *Ann. Math. Statist.*, **43, 1566–1580.**