平均と分散の両方に制約を課したモデルに対する **AIC** 規準

広島大学　稲津　佑

統計的推測において, 候補のモデルの中からなんらかの意味で最適なモデルを選ぶことは重要である. モデル選択のための手法のひとつに, AIC 規準を用いた方法がある. AIC は, 特定の正則条件の下で

$$\mathrm{AIC} = -2 \times \text{最大対数尤度} + 2 \times \text{パラメータ数},$$

と定義されることはよく知られている. ここで注目すべきは, 罰則項がパラメータの数にのみ依存し, パラメータの真値には依存していない点である. しかしながら, 前述したようにこれらの結果は特定の正則条件の下で導出される. 従って, 正則条件が崩れた場合, 例えば, パラメータに不等式制約が与えられているような場合, 罰則項は 2 倍のパラメータ数とはならず, 更にはパラメータの真値にも依存する.

本研究では, 次のモデルを考える. $\boldsymbol{x}_j^{(g)}$ を第 g クラスターの第 j 番目の観測変数ベクトルとし, p 次元正規分布 $N_p(\boldsymbol{\mu}^{(g)}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従っているとする. 但し, $g = 1, \ldots, k$ であり, 各 g に対し, $j = 1, \ldots, N_g$ である. また, すべての観測変数ベクトルは互いに独立であり, $\boldsymbol{\mu}^{(g)}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{\mu}^{(g)} = \boldsymbol{\mu} + \delta_g \mathbf{1}_p,\ \boldsymbol{\Sigma} = \rho \mathbf{1}_p \mathbf{1}_p' + \sigma^2 \boldsymbol{I}_p,\ \ \delta_k = 0,\ \sigma^2 > 0,$$

と表される.

本報告では, 平均パラメータ δ_g と分散パラメータ ρ に

$$\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_{k-1} \geq 0,\ \ \rho \geq 0,$$

という不等式制約を課した下での AIC 規準について報告する. 特に, $k = 2,\ N_1 = N_2 = N,\ p = 2$ という最も単純な場合においては, 適当な変数変換により,

$$x_1, \ldots, x_N \sim N(\mu_1, \alpha),\ y_1, \ldots, y_N \sim N(\mu_2, \alpha),\ z_1, \ldots, z_{2N} \sim N(\mu_3, \beta),$$

というモデルに, $\mu_1 \leq \mu_2,\ \alpha \geq \beta$ という制約を課したモデルを考えればよい. ただし, すべての確率変数は互いに独立である. このとき, AIC は

$$\mathrm{AIC} = -2 \times \text{最大対数尤度} + 2 \times \text{パラメータ数} - 2 \times 1_{\bar{x} > \bar{y}} - 2 \times 1_{S_1 < S_2},$$

と表される. ただし,

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ \bar{z} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{2N} z_i,$$

$$S_1 = \frac{1}{2N}\left\{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2\right\},\ S_2 = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{2N}(z_i - \bar{z})^2,$$

である. この AIC は, 未知パラメータの値によらずに漸近不偏な推定量となる.