正方分割表解析における f-divergence に基づく非対称モデルについて

東京理科大学　田畑 耕治

1. はじめに

行と列が同じ分類からなる分割表の解析において，種々の対称性や非対称性のモデルが導入されている（例えば，[1], [2], [6], [7]）．また，Caussinus [2] は「対称モデルが成り立つための必要十分条件は準対称モデルと周辺同等モデルの両方が成り立つことである」という対称モデルの分解定理を与えた．本講演では，f-divergence に基づく非対称モデルを提案する．Kateri and Papaioannou [4] や Kateri and Agresti [3] で提案されたモデルは，提案モデルの特別な場合である．また，提案モデルを用いた対称性の分解を与える．

2. モデル

順序カテゴリ $r \times r$ 正方分割表において，(i,j) セル確率を π_{ij} とする（$i = 1,\ldots,r; j = 1,\ldots,r$）．f-divergence に基づく非対称（$\mathrm{AS}_k[\mathrm{f}]$）モデルを次のように定義する：任意に与えられた k（$k = 1,\ldots,r-1$）に対して，

$$\pi_{ij} = \pi_{ij}^{S} F^{-1}\left(\sum_{h=1}^{k} i^h \alpha_h + \gamma_{ij}\right) \quad (i = 1,\ldots,r; j = 1,\ldots,r),$$

ただし，$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$，$\pi_{ij}^{S} = (\pi_{ij} + \pi_{ji})/2$，$F(u) = f'(u)$ である．ここに，f は $(0,+\infty)$ で二階微分可能な狭義凸関数で $f(1) = 0$ を満たし，$f(0) = \lim_{u\to 0} f(u)$，$0 \cdot f(0/0) = 0$，$0 \cdot f(a/0) = a \lim_{u\to\infty}[f(u)/u]$ とする．特に $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ のとき，対称（S）モデル（Bowker [1]）である．また，$\mathrm{AS}_{r-1}[\mathrm{f}]$ モデルは，Kateri and Papaioannou [4] の f-divergence に基づく準対称（QS[f]）モデルであり，$\mathrm{AS}_1[\mathrm{f}]$ モデルは，Kateri and Agresti [3] の f-divergence に基づく順序準対称（OQS[f]）モデルの特別な場合である．

行変数を X，列変数を Y とする．周辺 k 次積率一致（ME_k）モデルを次のように考える：任意に与えられた k（$k = 1,\ldots,r-1$）に対して，

$$E(X^l) = E(Y^l) \quad (l = 1,\ldots,k).$$

このとき，次の定理を得る．

定理 1. 正方分割表において，任意に与えられた k（$k = 1,\ldots,r-1$）に対して，S モデルが成り立つための必要十分条件は $\mathrm{AS}_k[\mathrm{f}]$ モデルと ME_k モデルの両方が成り立つことである．

定理 1 において $k = 1$ とした結果は，Saigusa *et al.* [5] を参照されたい．

参考文献

[1] Bowker, A. H. (1948). *Journal of the American Statistical Association*, **43**, 572-574.

[2] Caussinus, H. (1965). *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, **29**, 77-182.

[3] Kateri, M. and Agresti, A. (2007). *Statistics and Probability Letters*, **77**, 598-603.

[4] Kateri, M. and Papaioannou, T. (1997). *Journal of the American Statistical Association*, **92**, 1124-1131.

[5] Saigusa, Y., Tahata, K. and Tomizawa, S. (2015). *Statistics and Probability Letters*, **101**, 33-37.

[6] Stuart, A. (1955). *Biometrika*, **42**, 412-416.

[7] Tahata, K. and Tomizawa, S. (2014). *SUT Journal of Mathematics*, **50**, 131-165.