

# ペアワイズ実現相関係数を用いた 多変量実現確率的ボラティリティ変動モデル

東京大・経済 山内雄太  
東京大・経済 大森裕浩

多変量の金融時系列の分析において収益率の系列間の相関構造は時間を通じて変動することが知られており、その推定はポートフォリオ設計やリスク管理の観点から重要となる。本研究では、実現ボラティリティ (Realized Volatility, RV) を用いて時間を通じたボラティリティの変動を推定する多変量実現確率的ボラティリティ変動モデル (Multivariate Realized Stochastic Volatility Model, MRSV モデル) の枠組みを拡張して動学的相関構造の推定手法を提案する。多変量確率的ボラティリティ変動モデル (Multivariate Stochastic Volatility Model, MSV モデル) として、 $\mathbf{y}_t$  を  $t$  時点の  $p \times 1$  収益率ベクトル、 $\mathbf{h}_t$  を  $p \times 1$  対数ボラティリティ・ベクトルとした以下のようなモデル

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \mathbf{V}_t^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t), \\ \mathbf{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}), \\ \mathbf{V}_t &= \text{diag}(\exp(h_{1t}), \dots, \exp(h_{pt})), \\ \boldsymbol{\Phi} &= \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_p),\end{aligned}$$

を考える。ただし、 $\mathbf{R}_t$  は  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  の  $p \times p$  相関行列、 $\mathbf{h}_t$  は一階の自己回帰過程に従うと仮定される。これに加えて、MRSV モデルは  $\mathbf{x}_t$  を  $p \times 1$  対数 RV ベクトルとして、RV の情報を以下の観測方程式のように取り入れたモデルであり、

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}_t + \mathbf{u}_t,$$

実現測度を導入することにより、パラメータの推定精度を高めることができる。同様に動学的な相関構造を推定する場合、データの次元が高くなると推定するパラメータの数が急激に増えるため、実現測度を導入することで推定精度を高めることができると期待されるが、観測頻度の比較的少ない系列が含まれる場合には、観測頻度を系列で揃えると実現測度の情報が減少してしまう。このため本研究では、系列内の全ての組み合わせで2系列のペアワイズ実現相関係数を計算し、この情報を用いて個々の2系列ごとに相関係数を推定することで、観測頻度の問題を回避する。具体的には、 $\boldsymbol{\epsilon}_t$  の相関係数  $\rho_{ij,t}$  のフィッシャー変換  $g_{ij,t}$  と、ペアワイズ実現相関係数のフィッシャー変換  $w_{ij,t}$  を用いて、観測方程式

$$w_{ij,t} = \delta_{ij} + g_{ij,t} + v_{ij,t}, \quad v_{ij,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{v,ij}^2),$$

を導入することで、実現測度の情報を最大限に活用し推定を行う方法について提案する。