点過程の推測理論と超高頻度データのモデリング

東京大学，CREST JST　　吉田 朋広

高頻度金融データ解析は統計科学の課題の一つである．高頻度かつ非同期的に観測される二つの確率過程に対して，“自然な” 補間によるリアライズド・コバリアンスはバイアスを持つことが知られ，この現象は「Epps 効果」と総称される．非同期高頻度データに対する統計推測論は最近１０年ほどの間に目覚ましい進歩を遂げ，lead-lag の計量とその応用も現実的になりつつある ([1])．市場のマイクロストラクチャーは Epps 効果のもう一つの原因と認識されている．マイクロストラクチャーをノイズと想定し，プレアベレージング等の方法でノイズを除去し，同時に最適収束率を達成するような，コボラティリティの推定法が最近発展している．

最近の研究は，マイクロストラクチャーそのもののモデリングに向かっている．計測とストレージ技術の発展により，確率過程の統計学はこの領域において連続時間のパラダイムに戻りつつあり，点過程によるモデリングが試みられている．筆者らは，プライスモデルおよびリミット・オーダー・ブック (LOB) モデルの構築と統計解析の基礎となる点過程回帰モデル (point process regression model, PPRM) を提案した．

区間 $I=[T_0,T_1]$ 上の d-次元点過程 $N^n=(N^{n,\alpha})_{\alpha\in\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}=\{1,...,\mathrm{d}\}$, の d-次元強度過程 $n\lambda^n(t,\theta)$ が次の表現を持つとする．

$$\lambda^n(t,\theta) \quad = \quad g^n(t,\theta)+\int_{\hat{T}_0}^{t-} K^n(t,s,\theta)dX^n_s. \tag{1}$$

ここで，θ はパラメータである．点過程 N^n の強度過程は，共変量として確率過程 g^n，K^n，X^n を参照する．($g^n(t,\theta)$ に $\int_{\hat{T}_0}^{T_0} K^n(t,s,\theta)dX^n_s$ を含めることができるが，Hawkes 型モデルの場合，今の表現が便利である.) すなわち，確率基底 $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F},P)$ ($\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in\hat{I}}$, $\hat{I}=[\hat{T}_0,T_1]\supset I$) 上で，各 $n\in\mathbb{N}$ と $\theta\in\Theta$ に対して，$(g^n(t,\theta))_{t\in I}$ は d-次元 predictable process, $(K^n(t,s,\theta))_{s\in[\hat{T}_0,t)}$ は $\mathrm{d}\times\mathrm{d}_0$ 行列値過程 ($t\in I$), $\mathcal{I}_0=\{1,...,\mathrm{d}_0\}$，$(X^n_t)_{t\in\hat{I}}$ は d_0-次元 $\mathbf{F}$-適合右連続増加過程である．多変量点過程 N^n は，θ が真のとき，$(\int_{T_0}^t n\lambda^n(s,\theta)ds)_{t\in I}$ を compensator とする．

PPRM(1) に対して，$n\to\infty$ の状況で，θ に関する擬似尤度解析 (quasi likelihood analysis, QLA, [3]) が構成できる (Ogihara and Yoshida [2])．とくに，この非エルゴード系において，最尤型推定量およびベイズ型推定量は漸近混合正規であり，積率収束が成り立つ．$X^n=n^{-1}N^n$ の Hawkes 型の場合は系として従う．

マーク付き点過程への一般化は容易である．また，$T_1\to\infty$ の場合，点過程のエルゴード性を介して漸近論が展開できる．

LOB の解析ためには，limit order, market order, cancellation の点過程の強度過程のモデリングが必要である．データ解析によって，強度過程は様々な共変量への依存性がわかってきた．強度関数のモデリングおよび共変量の選択の研究が進展している．

参考文献

[1] Hoffmann, M., Rosenbaum, M., Yoshida, N.: Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data. Bernoulli 19(2), 426–461 (2013)

[2] Ogihara, T., Yoshida, N.: Quasi likelihood analysis for point process regression models, preprint (2015)

[3] Yoshida, N.: Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations. Ann. Inst. Statist. Math. 63(3), 431–479 (2011)