標本相関係数の分布に対するホロノミック勾配法について

東京理科大学 橋口 博樹　　倉敷芸術科学大学 中川重和

1　はじめに

正規母集団の下での標本相関係数の正確な密度は，Fisher (1915)，Hotelling (1953) によって，各々無限級数形の違う表現系で求められている．それらをゼロ化する微分方程式系を考えると当然ながら同じであり，微分方程式の解としては同一であることが分かる．本発表では，密度をゼロ化するイデアルを考え，グレブナ基底を求めることにより，ホロノミックランクが２であることを示す．ホロノミック勾配法でしばしば問題となる初期値問題に対しても，正確な初期値を求められることを示し，密度関数や分布関数が高精度で数値計算できることを述べる．さらに，標本相関係数のように密度がスカラー変数の超幾何関数で表現できる分布では，パーセント点を求めるための分位関数も微分方程式から高精度で数値計算できること紹介する．

2　標本相関係数の密度関数のホロノミック性

母相関係数 ρ の 2 変量正規分布から独立に取られた N 個の標本から得られる標本相関係数 r の密度は，Hotelling(1953) によって，

$$f(r,\rho)=\frac{n-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}(1-\rho^2)^{\frac{n}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-3}{2}}(1-\rho r)^{-n+\frac{1}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};n+\frac{1}{2};\frac{1+\rho r}{2}\right). \tag{1}$$

で与えられている．ただし，$n=N-1$，${}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}x^k$ である．

　密度関数 $f(r,\rho)$ をゼロ化する微分作用素として，

$$h_1=c_{12}\partial_1^2+c_{11}\partial_1+c_{10},\ h_2=c_{22}\partial_2^2+c_{21}\partial_2+c_{20},\ h_3=c_{32}\partial_2+c_{31}\partial_1+c_{30}$$

を取ることができて，$h_jf(r,\rho)=0$ $(j=1,2,3)$ を満たす．密度関数 $f(r,\rho)$ をゼロ化する h_1,h_2,h_3 によって，これらで生成される $R_2=\mathbb{C}(r,\rho)\langle\partial_1,\partial_2\rangle$ の左イデアル I_f を

$$I_f:=\langle h_1,h_2,h_3\rangle$$

とする．また，次数付辞書式の順序を $\partial_1<\partial_2$ となる項順序の下で，次の定理が成り立つ．

定理 1.
1. $I_f=\langle h_1,h_2\rangle=\langle h_1,h_3\rangle=\langle h_2,h_3\rangle$ が成立する．つまり，$h_i\in\langle h_j,h_k\rangle$ $(1\leq i\neq j\neq k\leq 3)$.
2. I_f は R_2 のゼロ次元イデアルである．
3. $\{h_1,h_3\}$ は I_f のグレブナ基底である．
4. R_2/I_f はベクトル空間として，$\{1,\partial_1\}$ の基底をもち，したがってホロノミックランクは 2 である．

参考文献

[1] Fisher, R. A. (1915). Frequency distribution of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population, *Biometrika*, 10 (4), 507–521.

[2] Hashiguchi, H., Numata, Y., Takayama, N. and Takemura, A. (2013). The holonomic gradient method for the distribution function of the largest root of a Wishart matrix, *J. Multivar. Anal.* 117, 296–312.

[3] Hotelling, H. (1953). New light on the correlation coefficient and its transform, *J. Roy. Stat.*, B15, 193–225.