拡散パラメータの逐次推定手法の考案およびその実装

九州大学 清水 優祐

最尤推定や正則化推定などで得られる M-推定量は, 一般的に良い漸近的性質を持つことが知られている．その一方で, 目的関数の最適化を行うバッチ型の推定方式であるため, 複雑なモデルを扱う際には数値計算的困難が生じる．この問題に対するアプローチとして, 逐次推定が考えられる．逐次推定とは, 新たなデータの流入の度に推定値を微調整していく方法論であり, 大規模データの効率的オンライン処理を可能にする．確率近似法の一応用として古くに確立され, 独立標本 (Fabian, 1978) から従属データ (Sharia, 2010) まで長年に亘って発展してきている．そこで本研究は, 逐次推定の理論を応用し, 拡散パラメータの新たな推定手法を考案する．最適化を回避できる手法を拡散過程のパラメータ推定に対して構築できれば, 数値計算的側面まで考慮した方法論の提供として確率過程論の発展に寄与できる．

ドリフト項を持つウィーナー過程

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + \sqrt{\beta} w_t$$

を考える．ここで μ はランダムな局外過程であり, 拡散パラメータ β の真値を $\beta_0 \in \Theta_\beta \subset \mathbb{R}_+$ とする．また, 高頻度観測データを $(X_{t_j^n})_{j=1}^n$, $t_j^n = jh_n$, $h_n \to 0$ とする．このとき, 更新式

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_j^n &= \hat{\beta}_{j-1}^n + \frac{V(\hat{\beta}_{j-1}^n)}{(\sqrt{j})^2} \partial_\beta m_{n,j}(\hat{\beta}_{j-1}^n) \\
&= \hat{\beta}_{j-1}^n + \frac{2(\hat{\beta}_{j-1}^n)^2}{j} \left\{ -\frac{1}{2\hat{\beta}_{j-1}^n} + \frac{(X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2}{2h_n(\hat{\beta}_{j-1}^n)^2} \right\} \\
&= \left(1 - \frac{1}{j}\right)\hat{\beta}_{j-1}^n + \frac{(X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n})^2}{jh_n}, \qquad j \le n
\end{aligned} \tag{1}$$

により推定値のアップデートを行う．ここで $V(\beta_0) := 2\beta_0^2$ は擬似最尤推定量 $\hat{\beta}_n^{qmle}$ の漸近分散であり, $\mu \equiv 0$ と見なした擬似対数尤度関数を $\beta \mapsto \sum_{j=1}^n m_{n,j}(\beta)$ とする．(1) で定義される推定量 $\hat{\beta}_n^n$ が, 任意の初期値 $\hat{\beta}_0^n \in \Theta_\beta$ に対して $\hat{\beta}_n^{qmle}$ と漸近同等, すなわち,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^{qmle} - \hat{\beta}_n^n) \xrightarrow{P} 0$$

となる条件を導出し, $\hat{\beta}_n^n$ の漸近正規性および漸近有効性を確保する．また, 具体的なモデル設定における数値計算結果を紹介する．

主要参考文献

Sharia, T. (2010). Recursive parameter estimation: asymptotic expansion. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62(2), 343–362.