A unified approach to marginal equivalence in the general framework of group invariance

大阪経済大学・経済　紙屋英彦

v -spherical 分布に対する marginal equivalence の議論 (Fernández, Osiewalski and Steel (1995, JASA)) を，不変性の一般的な枠組みにおいて展開する．

群 H が空間 $\mathcal{X}$ に左から作用するとする: $H \times \mathcal{X} \ni (h,x) \mapsto hx \in \mathcal{X}$. また $\mathcal{X}_* \subseteq \mathcal{X}$ に別の群 G が左から作用するとする： $G \times \mathcal{X}_* \ni (g,x) \mapsto gx \in \mathcal{X}_*$. G -共変な写像 $r : \mathcal{X}_* \to G$ $(r(gx) = gr(x),\ g \in G,\ x \in \mathcal{X}_*)$ に対し，$z(x) := \{r(x)\}^{-1}x,\ x \in \mathcal{X}_*$, さらに $\mathcal{Z} := \{z(x) : x \in \mathcal{X}_*\}$ と定義する．$\mathcal{X}$ 上の測度 λ は H の作用の下で相対不変で，multiplier が χ_H であるとする: $\lambda(d(hx)) = \chi_H(h)\lambda(dx),\ h \in H$. また λ の $\mathcal{X}_*$ への制限は G の作用の下で相対不変で，multiplier が χ_G であるとする： $\lambda(d(gx)) = \chi_G(g)\lambda(dx),\ g \in G$. ここで $\lambda(\mathcal{X} \setminus h\mathcal{X}_*) = 0$ $(h\mathcal{X}_* := \{hx : x \in \mathcal{X}_*\})$ が各 $h \in H$ に対して成り立つと仮定する．

サンプリング・モデルとして，$\mathcal{X}_*$ 上の分布で λ に関する密度が以下の形であるものを考える：

$$p(x|h,g;f) = \frac{1}{\chi_H(h)\chi_G(g)} f(g^{-1}r(h^{-1}x)s(z(h^{-1}x))), \quad h \in H,\ g \in G.$$

ただし $s : \mathcal{Z} \to G$ と $f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0} := \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ は $\int_{\mathcal{X}_*} f(r(x)s(z(x)))\lambda(dx) = 1$ を満たすとする．コンパクトな部分群 $G_0 \leq G,\ H_0 \leq H$ が存在し，すべての $g \in G,\ g_0 \in G_0$ に対して $f(g_0 g) = f(g)$, また $h_0 x \in \mathcal{X}_*$ となるすべての $x \in \mathcal{X}_*,\ h_0 \in H_0$ に対して $r(h_0 x) = r(x),\ s(z(h_0 x)) = s(z(x))$ が成り立つとする．このとき $[h] := hH_0,\ [g] := gG_0$ とおくと，$p(\,\cdot\,|h,g;f)$ は (h,g) には $([h],[g])$ を通してのみ依存する．ここでは逆も成り立つと仮定し，$p(\,\cdot\,|h,g;f)$ が与える分布から $([h],[g])$ が一意に定まるとする． $p(x|h,g;f)$ を $p(x|[h],[g];f)$ とも書き，$\Theta := H/H_0 \times G/G_0$ $(H/H_0 = \{[h] : h \in H\},\ G/G_0 = \{[g] : g \in G\})$ をパラメータ空間と見なす． $[h]$ は興味あるパラメータ， $[g]$ は nuisance パラメータとする．

$\Theta = H/H_0 \times G/G_0$ 上の (proper あるいは improper な) 事前分布で，$\Pi_{H/H_0} \otimes \tilde{\mu}_{G/G_0}$ の形のものを考える．ここで Π_{H/H_0} は H/H_0 上の (proper あるいは improper な) 事前分布，$\tilde{\mu}_{G/G_0} := \pi(m\mu_G)$ は m を multiplier とする G/G_0 上の相対不変測度 (μ_G は G 上の左不変測度，$\pi : G \to G/G_0,\ \pi(g) := [g]$) である．

上述のサンプリング・モデルと事前分布から成るベイズモデル $\big(p(x|[h],[g];f),\ \Pi_{H/H_0} \otimes \tilde{\mu}_{G/G_0}\big)$ において，$(x,[h])$ の $\lambda \otimes \Pi_{H/H_0}$ に関する density kernel $p(x,[h]|f) := \int_{G/G_0} p(x|[h],[g];f)\, \tilde{\mu}_{G/G_0}(d[g])$ は次のようになる：$\tilde{\mu}_G := m\mu_G$ に対して $\int_G \chi_G(g^{-1})f(g^{-1})\tilde{\mu}_G(dg) < \infty$ を仮定する．このとき $p(x,[h]|f)$ は，以下の $p(x,[h])$ と比例的となる：

$$p(x,[h]) := \frac{1}{\chi_H(h)\tilde{\chi}_G(r(h^{-1}x))\tilde{\chi}_G(s(z(h^{-1}x)))}, \quad \tilde{\chi}_G := \frac{\chi_G}{m}.$$

(Π_{H/H_0} が支配測度 λ_{H/H_0} に関して密度 p_{H/H_0} をもつならば，$(x,[h])$ の $\lambda \otimes \lambda_{H/H_0}$ に関する density kernel は，上記の $p(x,[h])$ に $p_{H/H_0}([h])$ を乗じたものと比例的である.) これより，$s : \mathcal{Z} \to G$ と G -共変な $r : \mathcal{X}_* \to G$ を固定したとき，さまざまな f に対するベイズモデル $\big(p(x|[h],[g];f),\ \Pi_{H/H_0} \otimes \tilde{\mu}_{G/G_0}\big)$ はすべて同じ $p(x,[h])$ をもたらし，従って Osiewalski and Steel (1993, JE) の意味ですべて marginally equivalent となる．

ここでの一般的な枠組みにおける結果を用いれば，v -spherical 分布以外の問題においても marginal equivalence を示すことができる (Kamiya, arXiv:1403.7379, Section 5).

謝辞　本研究は JSPS 科研費 25400201 の助成を受けたものです．