

エルゴード的 Lévy 駆動型確率微分方程式の二段階推定

九州大学 上原 悠楨

九州大学 増田 弘毅

工学, 金融, 保険の分野では, 観測に伴うノイズの微小時間変動が非正規であるものが数多く存在し, 非正規 Lévy 過程により駆動される確率微分方程式 (SDE) モデルはそのような時間発展現象の記述に適している. この SDE モデルにおいて, 駆動する Lévy 過程の性質を捉えることは時間発展現象の解明において極めて重要である. 本研究は, drift 係数, scale 係数内のパラメータ推定に加えて, 駆動する Lévy 過程に対応した Lévy 測度の推定を行う二段階推定方式を与えるものである. 二段階推定を行うことで, 特に同時最適化の計算負荷の軽減が可能となる. Lévy 測度については, ここでは汎関数型パラメータの推定に着目する.

以下の一次元 SDE モデルを想定する:

$$dX_t = a(X_t, \alpha)dt + c(X_{t-}, \gamma)dJ_t.$$

ここで係数 (a, c) は有限次元パラメータ $(\alpha, \gamma) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ を除いて既知であるとする. また, J は任意の $q > 0$ に対して $E[J_1] = 0, E[J_1^2] = 1, E[|J_1|^q] < \infty$ を満たす Lévy 過程であり, その Lévy 測度を ν_0 で表す. 観測可能データは, $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ とし, $t_j = t_j^n = jh_n$ とする. 観測時間幅 $h_n > 0$ はある正数 ϵ_0 に対し, $nh_n^{1+\epsilon_0} \rightarrow \infty, nh_n^2 \rightarrow 0$ を満たすものとする. 正規型擬似最尤推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_n, \hat{\gamma}_n)$ を以下で定義する:

$$\hat{\theta}_n \in \operatorname{argmax}_{\theta} \left[- \sum_{j=1}^n \left\{ \log c^2(X_{t_{j-1}}, \gamma) + \frac{(\Delta_j X - h_n a(X_{t_{j-1}}, \alpha))^2}{c^2(X_{t_{j-1}}, \gamma)} \right\} \right].$$

ここで $\Delta_j X = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ とする. また Euler-丸山近似 $X_{t_j} \approx X_{t_{j-1}} + h_n a(X_{t_{j-1}}, \alpha) + c(X_{t_{j-1}}, \gamma) \Delta_j J$ ($\Delta_j J = J_{t_j} - J_{t_{j-1}}$) に基づいた Euler 残差 $\hat{\delta}_j$ を以下で定義する:

$$\hat{\delta}_j = \hat{\delta}_j^n = c(X_{t_{j-1}}, \hat{\gamma}_n)^{-1} (\Delta_j X - h_n a(X_{t_{j-1}}, \hat{\alpha}_n)).$$

適当な条件の下, この $\hat{\delta}_j$ と多項式的増大性を持つ関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ について以下の確率展開が成り立つ:

$$\sqrt{nh_n} \left(\frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \varphi(\hat{\delta}_j) - \int \varphi(x) \nu_0(dx) \right) = u_n + \hat{b}_n \sqrt{nh_n} (\hat{\gamma}_n - \gamma_0) + o_p(1).$$

ここで $u_n = \sqrt{nh_n} \left(\frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \varphi(\Delta_j J) - \int \varphi(x) \nu_0(dx) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \int \varphi(x) \varphi^T(x) \nu_0(dx))$ であり, $\hat{b}_n = - \left(\frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \partial \varphi(\hat{\delta}_j) \hat{\delta}_j \right) \otimes \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial_\gamma c(X_{t_{j-1}}, \hat{\gamma}_n)}{c(X_{t_{j-1}}, \hat{\gamma}_n)} \right)$ である. さらにある統計量 $\hat{\Gamma}_n$ が存在し, 以下の同時漸近正規性が得られる:

$$\hat{\Gamma}_n \left(\frac{\sqrt{nh_n} \left(\frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^n \varphi(\hat{\delta}_j) - \int \varphi(x) \nu_0(dx) \right)}{\sqrt{nh_n} (\hat{\theta}_n - \theta_0)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_{p+q}).$$

参考文献

- [1] Masuda, H. and Uehara, Y. (2015). Two-step estimation of ergodic Lévy driven SDE, arXiv:1505.01922.