低次元多様体上の Data Sharpening

島根大学総合理工学研究科　工藤　雅紀　　島根大学総合理工学研究科　内藤　貫太

1. はじめに ノンパラメトリック核型回帰において，バイアス縮小を導く方法として Data Sharpening が知られている．本発表では，説明変数が低次元多様体に埋め込まれている設定で，Data Sharpening を構成し，その理論的・数値的検証について報告する．

2. Data Sharpening 推定量 p 変量の説明変数を X，1 変量の目的変数を Y とし，その独立な n 個の観測値を $\{(X_i, Y_i)|1 \le i \le n\}$ とする．$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ を i.i.d の誤差とし，回帰モデル

$$Y_i = m(X_i) + v(X_i)\varepsilon_i,\ \mathrm{E}[\varepsilon_i] = 0,\ \mathrm{Var}[\varepsilon_i] = 1,\ i = 1, \cdots, n$$

を想定する．推定のターゲットは m である．Bickel & Li (2007) での設定を踏まえ，説明変数が d 次元多様体 $\mathcal{M}(d \le p,\ \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^p)$ に埋め込まれているとする．すなわち，$X_i \in \mathcal{M}$ を仮定する．このとき，$x \in \mathcal{M}$ に対して，d 次元のある開球から x の近傍へのなめらかな写像 φ が存在する．そこで，非退化な d 次元の密度関数 $f(z)$ が存在するとして，$f(\varphi^{-1}(x))$ を X の密度関数とする．

$\mathbb{R}^p \ni x$ における $m(x)$ の初期推定量 $\widehat{m}_{LL}(x, h)$ は，局所線形推定量で構成する．ここで，$\widehat{m}_{LL}(x, h) = \mathrm{e}_1^T(X_x^T W_x X_x)^T X_x^T W_x \underline{Y}$ であり，

$$X_x = \begin{bmatrix} 1 & (X_1 - x)^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (X_n - x)^T \end{bmatrix},\ \underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix},\ W_x = \mathrm{diag}(K_h(X_1 - x), \cdots, K_h(X_n - x))\ ,$$

K は球状対称なカーネル関数，$h > 0$ はバンド幅，$K_h(U) = K\left(U/h^p\right), \mathrm{e}_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T$ である．

残差 $r_i := Y_i - \widehat{m}_{LL}(X_i, h)$ から，$\{(X_i, r_i)|1 \le i \le n\}$ の局所線形推定量として $\widehat{r}_{LL}(x, h) = \mathrm{e}_1^T(X_x^T W_x X_x)^T X_x^T W_x \underline{R}$ を構成する．ここで，$\underline{R} = [r_1, \cdots, r_n]^T$ である．Data Sharpening 推定量は $\widehat{m}(x, h) := \widehat{m}_{LL}(x, h) + \widehat{r}_{LL}(x, h)$ として得られる．

3. 漸近挙動 $x \in \mathcal{M},\ n \to \infty,\ h \to 0,\ 1/(nh^d) \to 0$ のもとで，

$$\mathrm{E}[\widehat{m}(x, h) - m(x)|X_1, \cdots, X_n] = h^4 J_1(x|\varphi, \mathcal{H}_m, K) + o_p(h^4)\ ,$$
$$\mathrm{Var}[\widehat{m}(x, h)|X_1, \cdots, X_n] = \frac{1}{nh^d} J_2(x|\varphi, v, f, K)(1 + o_p(1))$$

となる x の関数 J_1, J_2 が存在する．ここで，J_1 は m のヘッセ行列 $\mathcal{H}_m$ と K および φ に依存し，J_2 は v, f, K, φ に依存する．Bickel & Li (2007) で議論された $\widehat{m}_{LL}(x, h)$ はバイアスが $O(h^2)$，分散は $O(1/(nh^d))$ である．一方，$\widehat{m}(x, h)$ のバイアスは $O(h^4)$，分散は $O(1/(nh^d))$ であり，バイアス縮小が生じていることがわかる．

参考文献

Bickel,P. and Li,B. (2007). Local polynomial regression on unknown manifolds. *In Complex Datasets and Inverse Problems: Tomography,Networks and Beyond. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes-Monograph Series,Vol.54 177-186* .