高頻度観測金融データに対する最尤型推定法

統計数理研究所　　荻原 哲平

近年株式市場における全取引の情報を記録した「高頻度観測金融データ」の利用可能性が高まり, それを用いた統計解析が活発に研究されている. このようなデータはその膨大な情報量から金融市場のミクロ構造のさらなる解明が期待されるが, その特有のデータ構造から幾つかの統計解析上の問題が生じる.

まず, 証券の高頻度観測データを確率過程でモデリングする際には無視できないレベルの観測ノイズがあることが実証研究から示唆されている. このような観測ノイズは「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」と呼ばれる. また, 日内において株価が観測されるのは株価の約定時もしくは新しい注文の到着時であるため, 異なる株式に対して観測時刻が一致していないという「非同期観測」の問題が必然的に生じる.

本報告では, 観測ノイズと非同期観測の存在下におけるパラメータ付拡散過程モデルの未知パラメータの最尤型推定量を構築し, その一致性, 漸近混合正規性や特殊なケースにおける漸近有効性, つまり推定量としての漸近的な最適性に関する結果を紹介する.

以下の確率微分方程式を満たす 2 次元確率過程 $X=\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ を考える：

$$dX_t=\mu(t,X_t,\sigma_*)dt+b(t,X_t,\sigma_*)dW_t,\quad t\in[0,T].$$

ここで, σ_* はモデルの（多次元）パラメータ, $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$：2 次元 standard Wiener process, μ：$\mathbb{R}^2$ 値 Borel 関数, $b=\{b^{ij}\}_{i,j=1}^2$：$\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ 値 Borel 関数とする. X の成分を X^1,X^2 と書き, $n\in\mathbb{N}$ に対して, X^1,X^2 の観測時刻をそれぞれ random times $\{S^{n,i}\}_{i=0}^{\ell_{1,n}},\{T^{n,j}\}_{j=0}^{\ell_{2,n}}\subset[0,T]$ で表す. また, $\max_{i,j}|S^{n,i}-S^{n,i-1}|\vee|T^{n,j}-T^{n,j-1}|\to^p 0$ $(n\to\infty)$ とする（高頻度観測極限）. 観測ノイズ：$\{\epsilon_i^k\}_{k=1,2,i\in\mathbb{Z}_+}$ を (X_t,W_t) と独立で, $E[\epsilon_i^k]=0$, $E[\epsilon_i^k\epsilon_j^l]=v_k\delta_{kl}\delta_{ij}$ を満たす random variables とする. 観測が $\{X_{S^i}^1+\epsilon_i^1\}_{i=0}^{\ell_{1,n}},\{X_{T^j}^2+\epsilon_j^2\}_{j=0}^{\ell_{2,n}}$ で与えられる時, この統計モデルに対する最尤型推定量を [1], [3] のアイディアを応用して構成し, 一致性, 漸近正規性などの推定量として妥当な漸近的性質が導かれることを示す.

さらに, Yoshida [4, 5] における多項式型大偏差不等式の理論を用いることで, 推定誤差が大きくなる確率に関するより精緻な評価を得ることができ, 最尤型推定量の推定誤差のモーメント収束が示される他, ベイズ型推定量を構築し, 対応する結果を示すことが可能となる. また, $\mu\equiv 0$ かつ $b(t,x,\sigma)$ が (t,x) に依らず, 観測ノイズが正規分布に従うような特殊なケースに対して, この統計モデルの局所漸近正規性を示し, 最尤型・ベイズ型推定量が漸近有効であるという結果も紹介する.

参考文献

[1] Gloter, A., Jacod, J. (2001): Diffusions with measurement errors. II. Optimal estimators, *ESAIM: Probability and Statistics*, **5**, 243-260.

[2] Ogihara, T. (2014): Parametric Inference for Nonsynchronously Observed Diffusion Processes in the Presence of Market Microstructure Noise, arXiv:1412.8173.

[3] Ogihara, T. and Yoshida, N. (2014): Quasi-likelihood analysis for nonsynchronously observed diffusion processes, *Stochastic Processes and their Applications*, **124**, 2954-3008.

[4] Yoshida, N.: Polynomial type large deviation inequalities and convergence of statistical random fields, *ISM Research Memorandum 1021*, Institute of Statistical Mathematics. (2006)

[5] Yoshida, N.: Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**, 431-479. (2011)