経験的SDEモデルによる時系列データ解析と
アンサンブル予測可能性評価

JST さきがけ／北海道大学大学院理学研究院　中野　直人
北海道大学大学院理学研究院　稲津　將
東北大学大学院理学研究科　楠岡　誠一郎
一橋大学大学院商学研究科　斉木　吉隆

1. 序

本講演では，相空間に縮約された時系列データの力学の情報を確率微分方程式（SDE）モデルを用いて構成し，それに基づいた予測可能性の評価法を提案する．ここでは，時系列データを SDE のある実現値とみなし，SDE の解と係数に関する公式を利用して時系列データから統計的に SDE を構成する．例えば 2 次元平面などの低次元空間に射影された時系列データは軌道が自己交差を持つ場合があり，そのような自励系として特徴付けできないようなデータの場合は確率論的に取り扱う本手法は有効性を発揮する．さらに SDE モデルによるマルコフ連鎖を用い，そのアンサンブル分散を計算することでモンテカルロ的に予測可能性を評価する．Lorenz 方程式の数値解などの平面射影データを具体例に，SDE モデルの適用可能性と予測可能性評価について検証する．

2. データ

ここで用いるデータセットの一つは Lorenz 方程式

$$x' = p(y-x), \quad y' = -y + x(r-z), \quad z' = -bz + xy \quad (p=10,\ r=28,\ b=8/3)$$

の平面射影データである．Lorenz 方程式のデータは，初期値を $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ とし，時間間隔 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ で 4 次ルンゲ＝クッタ法で計算する．$0 \leq t \leq 100$ までは遷移状態とみなし，アトラクタ上の軌道である $t_0 := 100 < t \leq 10100$ までの 10^7 個のデータを採取する．さらにこれを第 1，第 2 主成分が張る平面への射影を施した時系列データを解析する時系列データとする．

3. 手法

SDE モデルによる時系列解析とは，対象の時系列データがある SDE

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t + \mathbb{S}(\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t \tag{1}$$

のある実現値における解軌道であるとみなして，データだけを用いてドリフトベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ と拡散行列 $\mathbb{B}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{S}(\boldsymbol{x})\mathbb{S}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}/2$ を評価する手法である．これを用いることでドリフトの向きや強さ，拡散の強さなどの力学の情報を相空間上に構築することができる．SDE(1) の係数と解の間には

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\tau\to 0}(\mathrm{E}_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{X}_\tau - \boldsymbol{x}])/\tau, \quad \mathbb{B}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\tau\to 0}(\mathrm{E}_{\boldsymbol{x}}[(\boldsymbol{X}_\tau - \boldsymbol{x}) \otimes (\boldsymbol{X}_\tau - \boldsymbol{x})])/2\tau \tag{2}$$

という関係がある（ただし $\mathrm{E}_{\boldsymbol{x}}[\,\cdot\,]$ は初期値が x のときの (1) の解が導く確率測度に対する期待値）．離散サンプルの時系列データ $\{\boldsymbol{X}_{t_n}\}_{t_n\in\mathbb{T}}$ に対しては，相空間を有限サイズのセル $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m\geq 1}$ に分割し，(2) における期待値 $\mathrm{E}_{\boldsymbol{x}}[\,\cdot\,]$ のかわりに各セル x_m を通過するデータに対するアンサンブル平均を用いて近似的に構成する．

本手法において重要な点は，離散的に (2) を評価する場合の評価時間 τ の設定であり，これは時系列データを SDE の解とみなすための適切な時間スケールの設定に対応する．適切な評価時間 τ を用いて得られるドリフト係数と拡散係数を用いることで，射影によって欠損した時系列データの情報，すなわち平面上の力学系としての非決定論性（軌道交差など）を補うことができる．講演では本手法や得られる結果の詳細についても触れたい．

参考文献

M. Inatsu, N. Nakano, S. Kusuoka and H. Mukougawa, *J. Atomos. Sci.* **72**, pp 774–786 (2015).
M. Inatsu, N. Nakano and H. Mukougawa, *J. Atomos. Sci.* **70**, pp 939–952 (2013).