擬似尤度と Schwarz 型モデル評価

九大数理　　　　江口 翔一
九大数理,　JST CREST　増田 弘毅

高頻度従属データモデルは連続時間確率過程で記述され, 標本路の変動指数が高い部分から順に情報を抽出可能とするなど, 通常の従属データ系列では構築不可能な推定メカニズムを提供する. 例えば確率微分方程式モデルの推定や, 多重指数変動型統計量による伊藤過程の累積ボラティリティ推定がこれに該当する. 今日まで赤池の AIC や Schwarz の BIC など, 様々なモデル評価・選択規準とその拡張・改良が様々なモデルに対して提案されてきているが, 高頻度従属データを扱えるものは数少ない (エルゴード的拡散過程の場合の AIC 型情報量規準については Uchida (2010, AISM), Fujii and Uchida (2014, SISP) を, また局所漸近混合正規型モデルの場合の Bayes 予測型情報量基準については Sei and Komaki (2007, JSPI) を参照).

尤度の構造が著しく複雑もしくは明示的に表せないような高頻度従属データモデルに係る推測問題では, 擬似尤度の役割は多大である. 本講演では, 真の尤度とは限らないという広い意味での擬似対数尤度関数 $\mathbb{H}_n : \Theta \times \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Theta \subset \mathbb{R}^p$) で局所漸近二次構造を持つものに対して,

- 擬似最尤推定量 $\hat{\theta}_n \in \operatorname{argmax} \mathbb{H}_n$ が漸近混合正規性 (Fisher 情報量行列がランダム) を持つ,
- $\hat{\theta}_n \in \mathbb{R}^p$ の要素で収束率が異なるものが存在する,

といった様々な状況を統一的に扱えるような Schwarz 型モデル記述評価法を導出する.

統計的確率場の大偏差評価 Yoshida (2011, AISM) を利用して, 簡潔な条件下で対数周辺擬似尤度の確率展開

$$\log\left(\int_{\Theta} \exp\{\mathbb{H}_n(\theta)\}\varphi(\theta)d\theta\right) = \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{2}\log\det\left(-\partial_\theta^2 \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n)\right) + O_p(1)$$

を導出できる (両辺期待値をとって右辺の $O_p(1)$ を $O(1)$ にすることも可能). ここで φ はパラメータ θ の事前分布の確率密度を表す. 慣例に倣って確率展開式の発散部分のみ取り出して -2 倍し, Bayes モデル $(\varphi, \mathbb{H}_n)$ に対する擬似 Schwarz 型統計量

$$-2\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n) + \log\det\left(-\partial_\theta^2 \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n)\right)$$

が自然に得られる (Eguchi and Masuda (2015)). 候補モデル毎に上記統計量を計算し, それが最小となるモデルを最適なものと判断する. これは Kullback-Leibler 情報量の意味で真のデータの周辺分布に最も近いモデルを選ぶことに相当する. 本結果により古典的 BIC の適用範囲が大きく拡張され, 汎用性の高い Schwarz 型の相対的モデル記述評価が可能となる. 特に, 誤特定の可能性がある一般化線形モデルを扱った Lv and Liu (2014, JRSS-B) の BIC 型統計量に関する結果が改良される.

ここでは観測情報量を加味した補正項 $\log\det\left(-\partial_\theta^2 \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n)\right)$ を提案しているが, データの従属性を加味せずに $\hat{\theta}_n$ の収束率とパラメータの次元にのみ依存する形 (典型例は $p \log n$) で補正項を定義してもよい.