条件付特性関数を用いた連続時間モデルの経験尤度推定

劉　慶豊
京都大学大学院経済学研究科

1　はじめに

ファイナンスの分野で用いられる連続時間モデルに関しては、尤度関数に比べて条件付き特性関数が比較的に入手しやすいケースが多々存在する。本稿では、この条件付き特性関数を用いて、経験尤度推定法を構築し、その推定量の漸近的性質を調べた。その上で、同じ条件付き特性関数を用いる Carrasco et al. (2003) が構築した C-GMM 法と比べてこの経験尤度推定法のもとでは、推定量の RMSE が小さくなるという優れた有限標本の性質をシミュレーションで確かめた。

2　条件付特性関数の求め方

ファイナンスの分野では様々な連続時間モデルが利用されている。たとえば、以下のような形を持つ確率微分方程式を満たす確率過程 $\{X_t\}$ がよく利用されている。

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t) + dZ_t.$$

ただし、$\mu(\cdot)$ と $\sigma(\cdot)$ は可測な連続関数で、Z_t はジャンプ過程である。このような過程を含んだマルコフ確率過程 $\{X_t\}$ の条件付特性関数（CCF) は以下のように定義される、

$$\psi(\omega,\tau|\theta,X_t) = E^{\theta}(e^{i\omega X_{t+\tau}}|X_t),$$

ここで、ω,τ,i,θ はそれぞれ transform variable、時間の増分、虚数単位とパラメータを表す。CCF は一部分の確率過程に関しては対応する Kolmogorov Backward Equation (KBE) を解くことにより求まる。特に多くのファイナンスモデルを含んだ exponential affine 過程の場合は CCF が明示的に求まる (Duffie et al. 2000)。

3　条件付モーメント制約のもとでの経験尤度推定

以上で定義した CCF と経験条件付特性関数（ECCF）$\exp(i\omega X_{t+\tau})$ を利用すると、次の条件付モーメント制約が得られる。

$$\begin{aligned} &E[\mathrm{Re}(\psi(\omega,\tau|\theta,X_t) - \exp(i\omega X_{t+\tau}))|X_t] = 0 \\ &E[\mathrm{Im}(\psi(\omega,\tau|\theta,X_t) - \exp(i\omega X_{t+\tau}))|X_t] = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donald et al. (2003) によると、K が十分に大きい時、次の式で表した無条件モーメント制約により、上の式の条件付モーメント制約を近似できる。

$$E[(\mathrm{Re}(\psi(\omega,\tau|\theta,X_t)-\exp(i\omega X_{t+\tau})))\otimes q^K(X_t)]=0$$
$$E[\mathrm{Im}((\psi(\omega,\tau|\theta,X_t)-\exp(i\omega X_{t+\tau})))\otimes q^K(X_t)]=0 \tag{2}$$

ここで、$q^K(x)=(1,x,x^2,x^3,I(x-s_1>0)(x-s_1)^3,\cdots,I(x-s_{K-3-1}>0)(x-s_{K-3-1})^3)'$ であり、$s_i(i=1,2,\ldots,K-3-1)$ は正の有理数の単調非減少列で、I は定義関数である。以下では (2) 式を略して $E[G(X_t)]=0$ と表現する。そして、このモーメント制約に経験尤度法を適用すれば、推定ができる。具体的には、以下の制約付き最大化問題を解くことに相当する。

$$\max_{p_i>0,\theta\in\Theta}\sum_{t=1}^{T}\ln p_i \ \ s.t.\ \sum_{t=1}^{T}pG(x_t)=0,\ \ \sum_{t=1}^{T}p_i=0. \tag{3}$$

上述した推定法の漸近的性質に関して、Donald et al. (2003) はデータが $i.i.d.$ の条件のもとで検証した。本稿の場合は、データが独立ではないため、直接 Donald et al. (2003) の定理を利用できないが、K を固定した場合に関しては、定常かつエルゴードの仮定を置けば、Donald et al. (2003) とほぼ同じ正則条件のもとで、大数の強法則であるエルゴード定理（White 2001）とマルチンゲル中心極限定理を適用することにより、推定量の一致性と漸近正規性が証明される。

4 モンテカルロ実験

有限標本の性質を調べるため、既存の方法と比較しながら、次の式で表せる Vasicek with exponential jump モデルのモンテカルロ実験を行った。

$$dr_t=(\theta-\kappa r_t)dt+\sigma dW_t+J_t dN_t,$$

ただし、$|J_t|\sim EXP(\alpha)$, $sign(J_t)\sim BIN(\beta)$, $N_t\sim POI(\lambda)$ である。比較する既存の推定方法として採用したのは Carrasco et al. (2003) が構築した C-GMM 法である。実験の結果として、我々の方法は Carrasco et al. (2003) より優れているところがあると分かった。詳細は省略する。

5 まとめ

本稿は経験尤度法を連続時間モデルの推定に適用した。推定量の漸近的性質を調べた上で、モンテカルロ実験を行い、経験尤度法の優れた有限標本の性質を確かめた。

参考文献

[1] Carrasco, M., Chernov, M., Florens, J-P., Ghysels, E., 2003. Efficient estimation of jump diffusions and general dynamic models with a continuum of moment conditions. *CIRANO Working Papers*: 2003s-02.

[2] Donald, S. D., Imbens, G. W., Newey, W. K., 2003. Empirical likelihood estimation and consistent tests with conditional moment restrictions. *Journal of Econometrics* **117**: 55-93.

[3] Duffie, D., Pan, J., Singleton, K. J., 2000. Transform analysis and option pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica* **68**: 1343-1376.

[4] White, H., 2001. *Asymptotic Theory for Econometricians*. Rev. ed, Academic Press, Tokyo.