2005年度統計関連学会連合大会
2005年9月12日〜15日（広島）

ダイナミックノイズを含むカオス的時系列における相関次元推定

久留米大・バイオ統計センター　川口 淳
九大・医学部　米本 孝二
久留米大・バイオ統計センター　柳川 堯

1. はじめに

データ $\{X_t\}_{t=1,2,\ldots,N}$ は次のモデルから生成されているとする．

$$X_t = F(X_{t-\tau}, X_{t-2\tau}, \ldots, X_{t-d\tau}) + \varepsilon_t \tag{1}$$

ただし，$F : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ は未知の関数, d と τ は未知の整数値で，d を埋め込み次元，τ を遅延時間，$\{\varepsilon_t\}$ をダイナミックノイズと呼ぶ．$\mathbf{X}_t = {}^t(X_t, X_{t-\tau}, \ldots, X_{t-(d-1)\tau})$ とすると (1) は次のように書き表せる．

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{t-\tau}) + \mathbf{e}_t, \tag{2}$$

ただし，$\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ に対し $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = {}^t(F(\mathbf{x}), x_1, \ldots, x_{d-1})$, $\mathbf{e}_t = {}^t(\varepsilon_t, 0, \ldots, 0)$．また，力学系 $Y_t = F(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-d})$ を考える．$\mathbf{Y}_t = {}^t(Y_t, Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-d+1})$ とおくと，そのシステムは次のように表せる．

$$\mathbf{Y}_t \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{Y}_{t-1}).$$

このモデルを (2) のスケルトンと呼ぶ．本報告では $\{X_t\}$ からスケルトンの相関次元を推定することを目的とする．

2. 相関次元

閉空間 $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ に対し $\mathbf{Y}_t \in \Omega$ であり，$\{\mathbf{Y}_t\}$ のエルゴード性が成立すると仮定する．さらに力学系を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbf{F})$ と形式化する, ただし，$\mathcal{F}$ は μ に関する σ-field であり, μ は不変測度, すなわち $A \in \mathcal{F}$ に対し $\mu(\mathbf{F}^{-1}A) = \mu(A)$ が成り立つ．$C(r) = \iint_{\Omega\times\Omega} I(\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq r) d\mu(\mathbf{y}_1) d\mu(\mathbf{y}_2)$ とおくと, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbf{F})$ における相関次元 ν は次のように定義される．

$$\nu = \lim_{r\to 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

ただし，I は定義関数，$\|\cdot\|$ はノルムを表す．

3. 推定方法

$\{X_t\}_{t=1,2,\ldots,N}$ からスケルトンの相関次元を推定する手順を以下のように提案する．

Step 1. Yonemoto and Yanagawa (2001) の方法を用いて，$\{X_t\}_{t=1,2,\ldots,N}$ から埋め込み次元 d と遅延時間 τ を推定する．推定された埋め込み次元と遅延時間をそれぞれ $\hat{d}$ と $\hat{\tau}$ とする．

Step 2. 次の $\hat{F}_N(\mathbf{x})$ を使って $F(\mathbf{x})$ を推定する．

$$\hat{F}_N(\mathbf{x}) = \sum_{i=(\hat{d}-1)\hat{\tau}+1}^{N-\hat{\tau}} K_{h_N}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) X_{i+\hat{\tau}} \Bigg/ \sum_{i=(\hat{d}-1)\hat{\tau}+1}^{N-\hat{\tau}} K_{h_N}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i),$$

ただし，$\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_{\hat{d}})$, $K_{h_N}(\mathbf{x}) = h_N^{-\hat{d}} \prod_{i=1}^{\hat{d}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h_N^2}\right)$.

次に $\hat{F}_N(\mathbf{x})$ を使って $\{\hat{\mathbf{Y}}_{N,t}\}_{t=1,2,\ldots,K}$ を生成する，ただし $\hat{\mathbf{Y}}_{N,t} = {}^t(\hat{Y}_{N,t}, \hat{Y}_{N,t-1}, \ldots, \hat{Y}_{N,t-\hat{d}+1})$．生成の方法は次のようである．$\hat{\mathbf{F}}_N(\mathbf{x}) = {}^t(\hat{F}_N(\mathbf{x}), x_1, \ldots, x_{\hat{d}-1})$ とおき，データ $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^N$ から適当な初期値 $\hat{\mathbf{Y}}_{N,1}$ を選んで,

$$\hat{\mathbf{Y}}_{N,t} = \hat{\mathbf{F}}_N(\hat{\mathbf{Y}}_{N,t-1}) \tag{3}$$

から $\hat{\mathbf{Y}}_{N,2}$ を計算する．この $\hat{\mathbf{Y}}_{N,2}$ を使って (3) から $\hat{\mathbf{Y}}_{N,3}$ を計算する．これを繰り返して，$\{\hat{\mathbf{Y}}_{N,t}\}_{t=1,2,\ldots,K}$ を得る．

Step 3. $\{\hat{Y}_{N,t}\}_{t=1,2,\ldots,K}$ から Kawaguchi(2002) が提案した推定量で相関次元を推定する．推定量は以下のように与えられる．まず,

$$\begin{aligned} C_K(r, \hat{\mathbf{Y}}_N) &= \binom{K}{2}^{-1} \sum_{i<j}^{K} I(\|\hat{\mathbf{Y}}_{N,i} - \hat{\mathbf{Y}}_{N,j}\| \le r), \\ C_{K2}(r, \hat{\mathbf{Y}}_N) &= \binom{K}{3}^{-1} \sum_{i\ne j, i\ne k, j\ne k}^{K} I(\|\hat{\mathbf{Y}}_{N,i} - \hat{\mathbf{Y}}_{N,j}\| \le r, \|\hat{\mathbf{Y}}_{N,i} - \hat{\mathbf{Y}}_{N,k}\| \le r), \end{aligned}$$

とし，$r_j^{(M_{N,K})} = r_0 s^{M_{N,K} - \left[\frac{M_{N,K}}{2}\right] + j}$ $(j = 0, 1, \ldots, L_{N,K} = [\frac{M_{N,K}}{2}])$ とする．ただし，ある与えられた $0 < s < 1$ と $r_0 > 1$ に対し,

$$M_{N,K} = \max\{m \in \mathbf{N};\ C_{K2}(r_m, \hat{\mathbf{Y}}_N) \ne 0 \text{ for } r_m = r_0 s^m\}.$$

このとき相関次元推定量は

$$\hat{\nu}_{N,K} = \sum_{j=0}^{L_{N,K}} (u_j - \bar{u}) \log C_K(r_j^{(M_{N,K})}, \hat{\mathbf{Y}}_N) \Big/ \sum_{j=0}^{L_{N,K}} (u_j - \bar{u})^2,$$

ただし，$u_j = \log r_j^{(M_{N,K})}$, $\bar{u} = (L_{N,K} + 1)^{-1} \sum_{j=0}^{L_{N,K}} u_j$.

4. 一致性

このようにして得られた相関次元推定量はいくつかの仮定の下でスケルトンの相関次元の一致推定量になる．すなわち，$\mathcal{E} \times \mu$ をダイナミックノイズの測度 $\mathcal{E}$ と不変測度との直積とすると，次の定理が成り立つ．

定理 いくつかの仮定の下, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次式が成り立つ．

$$\lim_{K\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathcal{E} \times \mu(|\hat{\nu}_{N,K} - \nu| > \varepsilon) = 0.$$

詳細については当日報告する．

参考文献

Kawaguchi, A., (2002). Estimating the correlation dimension from chaotic dynamical systems by U-statistics. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **34**(2) 143−150.

Yonemoto, K. and Yanagawa, T., (2001). Estimating the embedding dimension and delay time of chaotic time series by an autoregressive model, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **33**, No.1−2, 53−62.