一般安定分布の正規分布近くでの挙動

東大・経済・院　松井 宗也

1. 発表内容

確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$, i.i.d, に対し，すべての n についてある適当な定数 $c_n > 0$ と γ_n が存在して和 S_n の分布が $c_n X_1 + \gamma_n$ の分布に等しい (退化しない) とき安定分布であると定義される．また独立な確率変数に対し $a_n^{-1}(S_n - b_n)$ がある分布に近づくように $a_n > 0$ と b_n がとれるならば極限分布は必ず安定分布となる．このため安定分布は正規分布の自然な一般化として考えられ様々な応用が期待されている．パラメータは $\alpha \in (0,2]$ (尖り度), $\beta \in [-1,1]$ (歪み度), $\mu \in (-\infty, \infty)$ (位置), $\sigma \in (0, \infty)$ (尺度) の 4 つである．また，正規分布 ($\alpha = 2$) の時はすべてのモーメントを有し他の場合は分散を持たない，正規分布では α の情報量が発散するなど $\alpha = 2$ と $\alpha \neq 2$ で状況が非常に異なる．Nagaev and Shkol'nik (1988) は対称安定分布の正規分布近くでの挙動を明らかにし α の情報量の発散のオーダーを求めた．本研究では Nagaev and Shkol'nik (1988) を拡張して一般安定分布 ($\beta \neq 0$) の正規分布近くでの分布の挙動を明らかにするともに α の情報量の発散のオーダーを求めた．更に $\alpha \uparrow 2$ の時 4 つのパラメータ全ての情報量の挙動を明らかにした．今回の研究は主に理論的な興味であるが今後この特異性を最尤法や尤度比検定を行う際どのように取り扱うかが課題となる．

2. 安定分布の積分表現

安定分布の特性関数は以下のように書ける．

$$\Phi(t) = \Phi(t;\mu,\sigma,\alpha,\beta) = \exp\left(-|\sigma t|^{\alpha}\left\{1 + i\beta(\mathrm{sign}t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)(|\sigma t|^{1-\alpha} - 1)\right\} + i\mu t\right)$$

標準安定分布 ($\mu = 0, \sigma = 1$) を仮定，パラメータの変換を定義する．

$$\zeta = -\beta\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad \varrho = \frac{2}{\pi\alpha}\arctan\left(\beta\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right).$$

Zolotarev (1986) により (Nolan (1997) も参照) 密度関数は $\alpha \neq 1$ で $x > \zeta$ の場合に

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha|x-\zeta|^{1/(\alpha-1)}}{2|\alpha-1|}\int_{-\varrho}^{1} A(\varphi;\alpha,\beta)\exp\left(-|x-\zeta|^{\alpha/(\alpha-1)}A(\varphi;\alpha,\beta)\right)d\varphi$$

と書かれる．ただし

$$A(\varphi;\alpha,\beta) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\varrho\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right)}{\sin\left\{\frac{\pi}{2}\alpha(\varphi+\varrho)\right\}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\{\alpha\varrho + (\alpha-1)\varphi\}\right]}{\cos(\frac{\pi}{2}\varphi)}$$

である．$x < \zeta$ の場合には $f(x;\alpha,\beta) = f(-x;\alpha,-\beta)$ の関係を用いる．証明は特性関数を複素平面に拡張し，コーシーの定理を用い経路積分を工夫することで得られる．

3. $\alpha \uparrow 2$ での挙動の解析

$\alpha \uparrow 2$ のとき上の積分表現の積分区間を α と x に依存させて分割し，比の意味で大きくなる項を求めると以下の定理が得られる．$\Delta = 2 - \alpha$ とおく．

表 1: Limit of information matrix at $\alpha = 2$

$I_{\theta\theta}$	μ	σ	α	β
μ	0.5	0	0	0
σ	0	2.0	$-\infty$	0
α	0	$-\infty$	∞	0
β	0	0	0	0

Theorem 1 $\beta \in (-1, 1)$ を固定し $\beta^* = \beta\ \mathrm{sign}(x - \zeta)$ とおき

$$\begin{aligned} F_1(x; \alpha, \beta) &= f(x - \zeta; 2), \\ F_2(x; \alpha, \beta) &= (1 + \beta^*)\Delta|x - \zeta|^{\Delta - 3}, \\ g(x; \alpha, \beta) &= F_1(x; \alpha, \beta) + F_2(x; \alpha, \beta) \end{aligned}$$

と定義しておく．任意の小さな正数 ϵ に対しある Δ_0 と x_0 が存在してすべての $\Delta < \Delta_0$ と $x > x_0$ に対して

$$|f(x; \alpha, \beta)/g(x; \alpha, \beta) - 1| < \epsilon$$

となる．更に任意に小さい正数 $\delta > 0$ に対して,

$$g(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} F_1(x; \alpha, \beta)\left(1 + o(\Delta^{\delta/2})\right) & \text{if } |x - \zeta| \le (2 - \delta)(\log 1/\Delta)^{1/2} \\ F_2(x; \alpha, \beta)\left(1 + o(\Delta^{\delta/2})\right) & \text{if } |x - \zeta| \ge (2 + \delta)(\log 1/\Delta)^{1/2} \end{cases}$$

が $|x| > x_0$ に関して一様に成り立つ.

この定理の意味するところは，正規分布近くの安定分布は裾を除いて正規分布で近似でき，裾は多項式で近似できるということである．裾のオーダーに注目すれば安定分布が 2 次モーメントを有しないことが見てとれる．パラメータ θ に関する情報量を $I_{\theta\theta}$ と定義しパラメータに関する密度関数の微分を詳しく解析すると，$\alpha \uparrow 2$ の極限操作で情報量行列は表 1 のようになる．なお $I_{\alpha\alpha}$ の情報量のオーダーは $x > \zeta$ と $x < \zeta$ の積分の計算で β に関する部分が打ち消し合い，対称な場合と同じオーダーになった.

$$I_{\alpha\alpha} = \frac{1}{4\Delta \log 1/\Delta}(1 + o(1)).$$

参考文献

[1] Matsui, M. (2005). Fisher information matirix of genaral stable distributions close to the normal distribution, to appear in *Mathematical Methods of Statistics.*

[2] Nolan, J. P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution. *Comm. Statist. Stochastic Models*, **13**, 759–774.

[3] A. V. Nagaev and S. M. Shkol'nik, (1988). Some properties of symmetric stable distributions close to the normal distribution, *Theory of Probability and its Applications*, **33**, 139–144.

[4] Zolotarev, V. M. (1986). *One-Dimensional Stable Distributions.* Transl. of Math. Monographs, **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (Transl. of the original 1983 Russian)